

## Немного многочленов и непрерывности

- (а) Многочлен  $P(x)$  таков, что уравнение  $P(x) = x$  не имеет корней. Докажите, что уравнение  $P(P(x)) = x$  также не имеет корней.

(б) Пусть  $P(x)$  имеет нечётную степень. Докажите, что уравнение  $P(P(x)) = 0$  имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение  $P(x) = 0$ .

(в) Многочлен  $P(x)$  таков, что многочлены  $P(P(x))$  и  $P(P(P(x)))$  строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что  $P(x)$  тоже строго монотонен на всей вещественной оси.
- Пусть  $f(x) = x^3 - x$ ,  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ . Докажите, что при любых действительных  $a$  и  $b$ , сумма которых не равна 0, многочлен  $af(x) + bg(x)$  имеет три различных действительных корня.
- Пусть многочлен  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  имеет хотя бы один действительный корень и  $a_0 \neq 0$ . Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи  $P(x)$ , можно получить из него число  $a_0$  так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.
- Докажите, что для любого  $0 \leq a \leq \frac{1}{50}$  и для любого многочлена  $P(x)$  степени 99, такого, что  $P(0) = P(1) = 0$ , найдутся такие  $x_1$  и  $x_2$  из отрезка  $[0, 1]$ , что  $P(x_1) = P(x_2)$  и  $x_2 - x_1 = a$ .