

Немного многочленов и непрерывности

- (а) Многочлен $P(x)$ таков, что уравнение $P(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = x$ также не имеет корней.

(б) Пусть $P(x)$ имеет нечётную степень. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

(в) Многочлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что $P(x)$ тоже строго монотонен на всей вещественной оси.
- Пусть $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Докажите, что при любых действительных a и b , сумма которых не равна 0, многочлен $af(x) + bg(x)$ имеет три различных действительных корня.
- Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и $a_0 \neq 0$. Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.
- Докажите, что для любого $0 \leq a \leq \frac{1}{50}$ и для любого многочлена $P(x)$ степени 99, такого, что $P(0) = P(1) = 0$, найдутся такие x_1 и x_2 из отрезка $[0, 1]$, что $P(x_1) = P(x_2)$ и $x_2 - x_1 = a$.