Преобразования подобия и подобные конструкции

1. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах BC и AD отмечены точки E и F соответственно. Докажите, что (ABF) касается прямой ED тогда и только тогда, когда (ECD) касается прямой BF.

2. Точка P выбрана внутри треугольника ABC, прямые AP и CP пересекают окружность (ABC) в точках Q и R. Докажите, что можно провести касательную из точки A к окружности (PBR) и касательную из точки C к окружности (PBQ) так, чтобы они пересеклись на окружности (ABC).

3. Окружность ω касается внутренним образом окружности Ω в точке C. Хорда AB окружности Ω касается ω. Хорды CF и BG окружности Ω пересекаются в точке E, лежащей на ω. Докажите, что окружность, описанная около треугольника CGE, касается прямой AF.

4. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D, а на луче BC - точка E так, что (ADC) касается прямой, проходящей через E параллельно AB. Докажите, что касательная, проведенная из E к (BCD) отсекает от угла ABC треугольник, подобный треугольнику ABC.

5. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке T, а лучи AB и DC - в точке R. Пусть S - повторное пересечение окружностей (ARD) и (BRC), а точки P и Q симметричны T относительно AB и CD соответственно. Докажите, что четырехугольник $PQRS$ вписан в окружность.

6. Вписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямые DE и DF в точках P и Q. Окружность, построенная на PQ как на диаметре, пересекает отрезок BC в точках X и Y. Докажите, что окружность AXY касается вписанной и описанной окружности треугольника ABC.

7. В остроугольном треугольнике ABC, $AB < AC$, провели медиану AM и высоту BH. Касательные к окружности (ABC), проведенные в точках A и B, пересекаются в точке T. Окружность (BMT) повторно пересекает (ABC) в точке S. Докажите, что окружность (SAH) касается прямой AB.

8. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D. Полувписанная окружность треугольника со стороны BC касается описанной в точке E. Точка F — проекция середины стороны BC на биссектрису угла A. Прямая AE пересекает окружность (DEF) в точке G. Докажите, что окружность (AFG) касается вписанной.