Счет в комплексных. Продолжение

При работе с биссектрисами и серединами дуг возникает извечная проблема: биссектриса угла неотличима от биссектрисы внешнего угла, а середина дуги — от середины дополняющей дуги. По смыслу при нахождения формул для этих объектов необходимо использование квадратного корня, но в поле комплексных чисел эта операция также неоднозначна. Одним из способов преодоления этой проблемы является введение хитрых параметров.

Утверждение. В треугольнике ABC отмечены середины A_0, B_0, C_0 меньших дуг BC, CA, AB соответственно. Тогда если мы обозначим комплексные координаты середин дуг через a_0, b_0 и c_0, то исходные вершины будут иметь координаты

$$a = -\frac{b_0c_0}{a_0}, b = -\frac{a_0c_0}{b_0}, c = -\frac{a_0b_0}{c_0}.$$

1. Пусть I – центр вписанной окружности равнобедренного треугольника $ABC(AB = AC)$. Прямая BI пересекает AC в точке D, а перпендикуляр к AC, проходящий через точку D, пересекает AI в точке E. Докажите, что точка, симметричная I относительно AC, лежит на описанной окружности треугольника BDE.

2. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы углов B и C пересекают стороны AC, AB в точках B_1, C_1, а также «меньшие» дуги AC, AB описанной окружности ω в точках B_0, C_0 соответственно. А ещё они пересекают друг друга в точке I. Прямые B_0C_0 и B_1C_1 пересекаются в точке X. Докажите, что $XI \parallel BC$.

3. Вписанная окружность остроугольного неравнобедренного треугольника ABC имеет центр I и касается его сторон BC, CA, AB в точках P, Q, R соответственно. В треугольнике также проведены высоты BE и CF. Докажите, что отражение I относительно RQ служит центром вписанной окружности треугольника AEF.

4. Предположим, что вписанная окружность треугольника ABC является единичной и касается сторон BC, AC, AB в точках P, Q, R.

   (а) Проверьте, что тогда центр описанной окружности (ABC) имеет координату $\dfrac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(p+r)}$.

   (б) Проверьте, что центр окружности Эйлера имеет координату $\dfrac{(pq+pr+qr)^2}{(p+q)(q+r)(p+r)}$.

   (в) Проверьте, что точка $f = \dfrac{pq+pr+qr}{p+q+r}$ лежит на пересечении описанных окружностей треугольников PQR и окружности Эйлера треугольника ABC.

   (г) **Теорема Фейрбаха.** Докажите, что вписанная окружность касается окружности девяти точек.

5. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках P, Q, R соответственно. Точка S — середина меньшей дуги QR. Отрезки SP, SB, SC пересекают отрезок QR в точках T, M, N. Докажите, что M и N — середины отрезков TR и TQ.

6. На описанной окружности треугольника ABC отмечены точки P и Q. Точка A_1 на стороне BC такова, что прямые PA' и QA' симметричны относительно прямой BC. Аналогично определяются точки B', C'. Докажите, что A', B', C' лежат на одной прямой.

Полезные (практические) советы.

- Перед тем, как считать координаты точек выработайте план решения. Разберитесь, что и в каком порядке Вы будете делать. И прежде чем приступать к реализации плана, потратьте не менее 5-10 минут на его оптимизацию: попробуйте переопределить точки поудобнее или заменить условия на равносильные, но алгебраически более простые.

- Вводите симметричные и однородные обозначения. В финале решения получатся симметричные однородные многочлены, и их легко будет разложить.

- Считайте аккуратно. Не делайте два алгебраических преобразования одновременно. К примеру, если надо раскрыть скобки и привести подобные, то сначала раскройте скобки, и только потом приведите подобные. Не экономьте бумагу; не пишите на клочках, полях и в случайных местах страницы.

- В финальном тождестве **никогда** (почти точно) не раскрывайте скобки; наоборот, раскладывайте многочлены на множители.

- Не забывайте про геометрический смысл комплексных чисел. Иногда при доказательстве тождества удобно все точки сдвинуть на вектор (прибавить комплексное число) или отразить отностительно прямой (взять сопряженное). От этого доказываемое тождество может стать заметно проще.

- Полезно вводить дополнительные точки на единичной окружности (например, второй раз пересекать прямые из условия с окружностью), так как они позволяют писать простые уравнения прямых; сами точки часто могут быть найдены исходя из мер дуг.

- Часто какая-то точка или какое-то условие симметрично зависит от двух стартовых параметров b и c. Попробуйте подставить в координату точки или в уравнение условия $b = c$ или $b = -c$. Если выражение занулилось, то оно делится соответственно на $(b - c)$ или $b + c$.