

Усреднение

Пример. Во взводе 10 человек. В каждый из 100 дней какие-то четверо назначались дежурными. Докажите, что какие-то двое были вместе на дежурстве не менее 14 раз.

1. В 7 вершинах расставлены числа. Известно, что сумма любых трех, лежащих на одной прямой или на отмеченной окружности, положительна. Может ли сумма всех чисел быть отрицательна?



2. В парке по кругу стоят 52 дерева. На эти деревья как-то сели 15 птиц. Докажите, что найдутся 7 подряд идущих деревьев, на которых в сумме сидят, по крайней мере, 3 птицы.
3. На кружок в ЦПМ ходит 30 школьников. Каждое занятие проводится парная олимпиада: все дети разбиваются на команды из двух человек (каждый раз по-разному), какая-то одна команда занимает первое место и получает медаль. Докажите, что через 900 занятий можно будет выделить подгруппу из 6 школьников, которая будет иметь хотя бы 32 медали (считается, что подгруппа имеет медаль, если оба человека, получившие эту медаль, содержатся в этой подгруппе).
4. Взяли две одинаковые шестерёнки с 60 зубьями, и у первой спилили 30 зубьев, а у второй — 40. Докажите, что шестерёнки можно наложить одну на другую так, что совпадут не менее 10 уцелевших зубьев. Является ли оценка точной?
5. Клетчатая доска 20×20 разрезана на фигурки T -тетрамино. Докажите, что можно разрезать доску по клеткам на две части прямолинейным разрезом так, чтобы повредить не более
(а) 7 (б) 6 тетраминошек.
6. Докажите, что для любого натурального $n > 3$ существует полный ориентированный граф на n вершинах, в котором (а) не менее (б) больше $\frac{n!}{2^{n-1}}$ путей, проходящих через каждую вершину ровно 1 раз.
7. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одного веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников, причём одна из чаш перевешивает. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашу весов все гири, на которых написана его фамилия. Докажите, что можно последовательно впустить в класс нескольких учеников таким образом, чтобы в результате перевесила не та чаша весов, которая перевешивала вначале.