Разнобой с подвохом

1. Назовем натуральное число *ровным*, если в его десятичной записи все цифры одинаковы (например, 3, 111, 444444). Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n+1$ ровных чисел.

2. Найдите все натуральные n, которые разбиваются в сумму степеней двойки с учётом порядка нечётным числом способов. (Например, у числа 4 шесть разбиений: $4 = 4 = 2+2 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$.)

3. Докажите, что для любого k и любого нечетного m найдется такое n, что $n^n - m$ делится на 2^k.

4. В 100 коробках, стоящих в ряд, лежит суммарно 10000 орехов. За одну операцию можно переложить сколько угодно орехов из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за 99 таких операций можно сделать так, что во всех коробках орехов будет поровну.

5. Известно, что некоторые сенаторы между собой в ссоре. Проверено, однако, что как бы мы не посадили их всех или любую группу (3 или более) из них по кругу, найдется пара соседей не в ссоре. Весь сенат усадили за круглый стол. Если два соседа не в ссоре, они могут поменяться местами. Докажите, что сенаторы могут расположиться в любом круговом порядке (порядки, полученные поворотом, не различаются).

6. Дано натуральное число k. На клетчатой плоскости изначально отмечено N клеток. Назовём крестом клетки A множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с A. Если в кресте неотмеченной клетки A отмечено хотя бы k других клеток, то клетку A также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем N это могло случиться?

7. Дано натуральное $n > 4$. Всегда ли можно соединить данные n точек общего положения на плоскости n-звенной замкнутой ломаной (так, чтобы в точности эти n точек являлись вершинами), имеющей ровно одно самопересечение?