

## Разной по теории чисел

1. Напомним, что  $(2n + 1)!! = (2n + 1)(2n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$  и  $(2n)!! = (2n)(2n - 2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2$ . Докажите, что  $1997!! + 1998!!$  делится на 1999
2. Михаил хочет расположить все натуральные числа от 1 до 2024 по кругу так, чтобы каждое число использовалось ровно один раз и для любых трех последовательных чисел  $a, b, c$  число  $a + c$  было кратно  $b + 1$ . Сможет ли он это сделать?
3. На доске написано 10 натуральных чисел. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько чисел и расставить между ними знаки «+» и «-» так, чтобы полученная в результате алгебраическая сумма делилась на 1001.
4. Пусть  $p$  — нечетное простое число, а  $a, b, c$  — целые числа такие, что числа  $a^{2023} + b^{2023}, b^{2024} + c^{2024}, a^{2025} + c^{2025}$  делятся на  $p$ . Докажите, что  $a, b, c$  делятся на  $p$ .
5. Даны натуральные числа  $a, b, c$ . Докажите, что если  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$  целое, то  $abc$  является кубом.
6. Натуральные числа  $d$  и  $d' > d$  — делители натурального числа  $n$ . Докажите, что  $d' > d + \frac{d^2}{n}$ .