Счет в комплексных. Начало

Фундамент. Основная идея состоит в том, что есть однозначное соответствие между точками на плоскости и комплексными числами. Мы выбираем ноль и направление вещественной и мнимых осей. Тогда каждой точки плоскости соответствует комплексное число.

Суть. Умножение на комплексное число - это *поворотная гомотетия*.

Общие формулы. Условие типа $z \in \mathbb{R}$ равносильно $z = \overline{z}$.

- $|AB|^2 = (a-b)(\overline{a}-\overline{b})$
- A, B, C коллинеарны тогда и только тогда, когда $\dfrac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R}$
- $AB \parallel CD$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{a-b}{c-d} \in \mathbb{R}$
- $AB \perp CD$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{a-b}{c-d} \in i\mathbb{R}$
- $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{a_1-b_1}{c_1-b_1} : \dfrac{a_2-b_2}{c_2-b_2} \in \mathbb{R}$
- A, B, C, D концикличны тогда и только тогда, когда $\dfrac{a-c}{b-c} : \dfrac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}$
- Верны все формулы, которые верны для векторов, ведь комплексные числа - это тоже векторы.

Т.к. мы часто пользуемся принадлежностью к $\mathbb{R}$, то нам надо будет работать с сопряженными векторами. А в этом нам хорошо помогает единичная окружность.

1. Пусть Ω – единичная окружность на комплексной плоскости. Тогда докажите формулы:

(а) $Z \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $z\overline{z} = 1$.

(б) $AB \perp CD (A, B, C, D \in \Omega)$ тогда и только тогда, когда $ab + cd = 0$.

(в) **(Самая важная!)** $Z \in AB (A, B \in \Omega)$ тогда и только тогда, когда $z + ab\overline{z} = a + b$.

(г) ZA касается $\Omega (A \in \Omega)$ тогда и только тогда, когда $z + a^2\overline{z} = 2a$.

(д) Z – точка пересечения касательных к A и B к Ω тогда и только тогда, когда $z = \dfrac{2ab}{a+b}$.

(е) K – основание перпендикуляра из Z на $AB (A, B \in \Omega)$ тогда и только тогда, когда $k = \dfrac{a+b+z-ab\overline{z}}{2}$.

(ж) H – ортоцентр $ABC (A, B, C \in \Omega)$ тогда и только тогда, когда $h = a + b + c$.

А теперь можно и на задачах попрактиковаться.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что ортоцентры треугольников ABC, ABD, ACD и BCD лежат на одной окружности.

3. Прямая t касается описанной окружности треугольника ABC в точке B. K проекция ортоцентра ABC на t, L середина AC. Докажите, что треугольник BKL равнобедренный.

4. (У кого-то уже было, но решите в комплах) Докажите, что середины трех отрезков, соединяющих проекции произвольной точки плоскости на пары противоположных сторон или диагоналей вписанного в окружность четырехугольника, лежат на одной прямой.

5. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Прямая AO вторично пересекает ω в точке A_1. Касательная к ω, восстановленная в точке A_1, пересекает BC в точке X. Прямая XO пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Докажите, что O середина PQ.

6. На окружности ω отмечены две точки A и B. Касательные к ω к точкам A и B пересекаются в точке S. Хорда XY окружности ω проходит через середину M отрезка AB. Докажите, что $\angle XSM = \angle MSY$.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах A, B, C равны. Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC проходит через D.

Счет в комплексных. Начало

Фундамент. Основная идея состоит в том, что есть однозначное соответствие между точками на плоскости и комплексными числами. Мы выбираем ноль и направление вещественной и мнимых осей. Тогда каждой точки плоскости соответствует комплексное число.

Суть. Умножение на комплексное число - это *поворотная гомотетия*.

Общие формулы. Условие типа $z \in \mathbb{R}$ равносильно $z = \overline{z}$.

- $|AB|^2 = (a-b)(\overline{a}-\overline{b})$
- A, B, C коллинеарны тогда и только тогда, когда $\dfrac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R}$
- $AB \parallel CD$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{a-b}{c-d} \in \mathbb{R}$
- $AB \perp CD$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{a-b}{c-d} \in i\mathbb{R}$
- $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{a_1-b_1}{c_1-b_1} : \dfrac{a_2-b_2}{c_2-b_2} \in \mathbb{R}$
- A, B, C, D코цикличны тогда и только тогда, когда $\dfrac{a-c}{b-c} : \dfrac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}$
- Верны все формулы, которые верны для векторов, ведь комплексные числа - это тоже векторы.

Т.к. мы часто пользуемся принадлежностью к $\mathbb{R}$, то нам надо будет работать с сопряженными векторами. А в этом нам хорошо помогает единичная окружность.

1. Пусть Ω – единичная окружность на комплексной плоскости. Тогда докажите формулы:

(а) $Z \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $z\overline{z} = 1$.

(б) $AB \perp CD (A, B, C, D \in \Omega)$ тогда и только тогда, когда $ab + cd = 0$.

(в) **(Самая важная!)** $Z \in AB (A, B \in \Omega)$ тогда и только тогда, когда $z + ab\overline{z} = a + b$.

(г) ZA касается $\Omega (A \in \Omega)$ тогда и только тогда, когда $z + a^2\overline{z} = 2a$.

(д) Z – точка пересечения касательных к A и B к Ω тогда и только тогда, когда $z = \dfrac{2ab}{a+b}$.

(е) K – основание перпендикуляра из Z на $AB (A, B \in \Omega)$ тогда и только тогда, когда $k = \dfrac{a+b+z-ab\overline{z}}{2}$.

(ж) H – ортоцентр $ABC (A, B, C \in \Omega)$ тогда и только тогда, когда $h = a + b + c$.

А теперь можно и на задачах попрактиковаться.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что ортоцентры треугольников ABC, ABD, ACD и BCD лежат на одной окружности.

3. Прямая t касается описанной окружности треугольника ABC в точке B. K проекция ортоцентра ABC на t, L середина AC. Докажите, что треугольник BKL равнобедренный.

4. (У кого-то уже было, но решите в комплах) Докажите, что середины трех отрезков, соединяющих проекции произвольной точки плоскости на пары противоположных сторон или диагоналей вписанного в окружность четырехугольника, лежат на одной прямой.

5. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Прямая AO вторично пересекает ω в точке A_1. Касательная к ω, восстановленная в точке A_1, пересекает BC в точке X. Прямая XO пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Докажите, что O середина PQ.

6. На окружности ω отмечены две точки A и B. Касательные к ω к точкам A и B пересекаются в точке S. Хорда XY окружности ω проходит через середину M отрезка AB. Докажите, что $\angle XSM = \angle MSY$.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах A, B, C равны. Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC проходит через D.