Городские кружки ЦПМ
Осенние сборы, ноябрь 2024, 10 класс
Материалы занятий

Содержание

Часть I

Группа 10–1

1. Алгебра

Симметрические многочлены

Определение. Многочлен от нескольких переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любых перестановках переменных.

Определение. *Элементарным симметрическим многочленом* называется многочлен

$$\sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}.$$

Основная теорема. Всякий симметрический многочлен единственным образом представляется в виде многочлена от элементарных симметрических. Коэффициенты этого многочлена — целочисленные линейные комбинации коэффициентов исходного многочлена.

Лемма 1. Пусть $u = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ — старший одночлен (относительно лексикографического порядка) симметрического многочлена. Тогда $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \dots \geqslant k_n$.

Лемма 2. Для любого одночлена $u = x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ с $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \dots \geqslant k_n \geqslant 0$ существуют такие целые неотрицательные числа $m_1, m_2, \dots, m_n$, что старший одночлен многочлена $\sigma_1^{m_1}\sigma_2^{m_2}\dots\sigma_n^{m_n}$ совпадает с u.

1. **(а)** Докажите лемму 1.

   (б) Докажите лемму 2.

   (в) Проведя индукцию по лексикографическому порядку, докажите существование представления из формулировки теоремы.

   (г) Предположив, что существует два различных представления и сократив все совпадающие члены, рассмотрите старший одночлен и докажите единственность представления.

2. Выразите $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

3. Про целые числа a, b, c известно, что $a + b + c = 0$. Докажите, что число $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ является точным квадратом.

4. Даны вещественные числа a, b, c и x, y, z, причём

   $$a + b + c = x + y + z, \quad a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad a^3 + b^3 + c^3 = x^3 + y^3 + z^3.$$

   Докажите, что $a^{2024} + b^{2024} + c^{2024} = x^{2024} + y^{2024} + z^{2024}$.

5. Многочлен $x^{2024} + y^{2024}$ выразили через элементарные симметрические как $P(xy, x + y)$. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена P.

6. **Рекуррентная формула Ньютона.** Обозначим $p_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$. Докажите, что при $1 \leqslant k \leqslant n$ имеет место равенство

   $$p_k - p_{k-1}\sigma_1 + \dots + (-1)^{k-1}p_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0.$$

   Как должна выглядеть формула при $k > n$?

7. Дано нечётное простое число p. Многочлен с целыми коэффициентами называется *перестановочным* по модулю p, если среди его значений в целых точках встречаются все возможные остатки при делении на p. Докажите, что у нелинейного приведённого перестановочного многочлена степень не может быть делителем числа $p-1$.

Симметрические многочлены - 2

1. Дан многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что любой симметрический многочлен от его (комплексных) корней есть рациональное число.

2. Докажите основную теорему о симметрических многочленах от нескольких наборов переменных. Если многочлен не меняется от перестановки переменных внутри наборов $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m, \ldots$, то его можно выразить через основные симметрические многочлены от $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m, \ldots$ (и через оставшиеся переменные).
Пример: $(t-x_1-y_1)(t-x_2-y_1)(t-x_1-y_2)(t-x_2-y_2)$ выражается через t и $x_1+x_2, x_1x_2, y_1+y_2, y_1y_2$.

Определение. Комплексное число α называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с рациональными коэффициентами.

3. Пусть α, β — алгебраические числа. Докажите, что числа **(а)** $-\alpha$; **(б)** α^{-1}; **(в)** $\alpha+\beta$ и $\alpha\beta$ также являются алгебраическими.

4. Юра посчитал произведение всех 2^{100} чисел вида
$$\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \ldots \pm \sqrt{99} \pm \sqrt{100}.$$
Докажите, что число, которое он получил, является **(а)** целым; **(б)** квадратом целого числа.

5. Все корни приведённого многочлена с целыми коэффициентами имеют модуль 1. Докажите, что все они являются корнями из единицы.

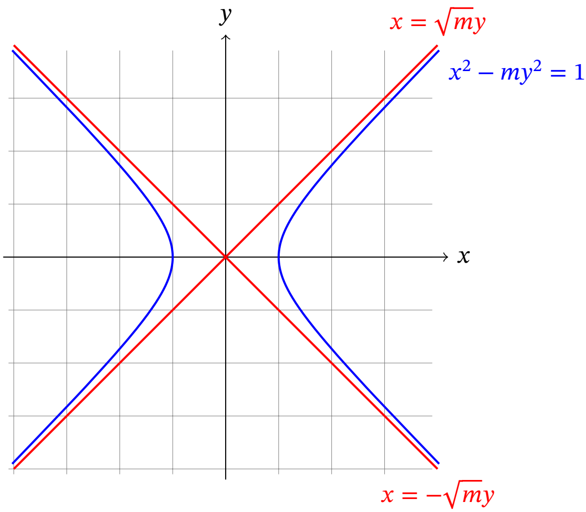
Уравнение Пелля. Теория

Определение. *Уравнением Пелля* называется диофантово уравнение

$$x^2 - my^2 = 1,$$

где m — натуральное число, не являющееся точным квадратом. Решение (x_0, y_0) называется *нетривиальным*, если $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$.

Геометрический смысл. Любая целочисленная точка, кроме $(0,0)$, лежит на одной из гипербол ℓ_N, задаваемой уравнением $x^2 - my^2 = N$, где N — целое ненулевое число. Асимптотами таких гипербол являются прямые $x = \sqrt{m}y$ и $x = -\sqrt{m}y$. Решение уравнения Пелля равносильно нахождению всех целочисленных точек гиперболы ℓ_1.



Пример: $x^2 - 2y^2 = 1$.

1. Если (x, y) — решение, то $(3x + 4y, 2x + 3y)$ — тоже решение.
2. Определим $(x_0, y_0) = (1, 0)$ и $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (3x_i + 4y_i, 2x_i + 3y_i)$. Хочется доказать, что (x_i, y_i) — **все** неотрицательные решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$. Для доказательства используем то, что отображение $(x, y) \mapsto (3x + 4y, 2x + 3y)$ имеет обратное $(x, y) \mapsto (3x - 4y, 3y - 2x)$.
3. Преобразование $(x, y) \mapsto (3x + 4y, 2x + 3y)$ сдвигает точки по правой ветви гиперболы ℓ_N, увеличивая y (здесь x, y не обязательно целые).
4. Если (x, y) — неотрицательное решение и $3y - 2x < 0$, то $(x, y) = (1, 0)$. Таким образом, (x_i, y_i) — это все решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$.

Алгебраический смысл

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right] = \{a + b\sqrt{m} \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$. В этом кольце есть операция *сопряжения*

$$\overline{a + b\sqrt{m}} = a - b\sqrt{m}.$$

Определим *норму* элемента

$$N\left(a + b\sqrt{m}\right) = a^2 - mb^2 = \left(a + b\sqrt{m}\right) \cdot \overline{a + b\sqrt{m}}.$$

Норма и сопряжение обладают хорошими свойствами: для $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$ выполнено

- $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$;
- $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$;
- $N(\alpha\beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$.

$\boxed{\text{Решить уравнение Пелля } x^2 - my^2 = 1 \Leftrightarrow \text{найти все элементы кольца } \mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right] \text{ нормы } 1}$

Некоторые элементы в кольцах бывают *обратимыми*. В $\mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$ это в точности элементы с нормой ± 1.

Пусть (x_1, y_1) — нетривиальное положительное решение уравнение Пелля с наименьшим x_1 ($\Leftrightarrow$ с наименьшим y_1). Оно называется *фундаментальным*.

Тогда $N\left((x_1 + y_1\sqrt{m})^k\right) = 1$, то есть мы нашли бесконечную серию решений. Докажем, что это все положительные решения. Отображение

$$x + y\sqrt{m} \mapsto (x_1 + y_1\sqrt{m}) \cdot (x + y\sqrt{m}) = (x_1x + my_1y) + (x_1y + y_1x)\sqrt{m}$$

(в координатном виде его можно записать $(x, y) \mapsto (x_1x + my_1y, x_1y + y_1x)$) есть наше таинственное отображение. А обратное к нему — это умножение на $\left(x_1 + y_1\sqrt{m}\right)^{-1}$.

Умножение на $x_1 + y_1\sqrt{m}$ переводит точки с правой ветви гиперболы ℓ_1 на неё же, сохраняя при этом порядок точек (по координате y).

Лемма о монотонности. Сопоставим точке (x, y), $x > 0$, вещественное число $x + y\sqrt{m}$. Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ — два решения уравнения Пелля. Тогда

$$y_1 < y_2 \Longleftrightarrow x_1 + y_1\sqrt{m} < x_2 + y_2\sqrt{m}.$$

Теорема. Числа $\pm\left(x_1 + y_1\sqrt{m}\right)^k$, $k \in \mathbb{Z}$ — это все элементы кольца $\mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$ с нормой 1, то есть все решения уравнения Пелля.

Замечание. В координатном виде решения уравнения Пелля — это пары

$$\pm\left(\frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{m}\right)^k + \left(x_1 - y_1\sqrt{m}\right)^k}{2}, \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{m}\right)^k - \left(x_1 - y_1\sqrt{m}\right)^k}{2\sqrt{m}}\right).$$

Уравнение Пелля. Задачи

Теперь можно забыть почти всё вышесказанное.

1. **(а)** Докажите, что элемент $\alpha \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$ обратим (то есть существует такой элемент β того же кольца, что $\alpha\beta = 1$) тогда и только тогда, когда $N(\alpha) = \pm 1$.

(б) Пусть (x, y) — решение уравнение Пелля, $\eta = x + y\sqrt{m}$. Тогда

$$\eta > 1 \Longleftrightarrow x > 0, y > 0 \quad \text{и} \quad 0 < \eta < 1 \Longleftrightarrow x > 0, y < 0.$$

(в) Забыв про гиперболы, про преобразования, и помня только о нормах и предыдущем пункте, докажите основную теорему о решениях уравнения Пелля.

2. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 6xy + y^2 = 1$.

3. Пифагорова тройка $(3, 4, 5)$ такова, что длины катетов отличаются на 1. А сколько всего пифагоровых троек с этим свойством?

4. Докажите, что если разность двух последовательных кубов равна n^2, то $2n - 1$ — точный квадрат.

5. Рассмотрим уравнение $x^2 - my^2 = r$, $r \in \mathbb{Z}$, $r \neq 0$, $m > 0$ — не квадрат.

(а) Приведите пример такого уравнения, у которого нет решений.

(б) Докажите, что это уравнение либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений. Как явно выписать *какую-нибудь* бесконечную серию решений?

6. Пусть $l(n)$ — количество простых чисел в разложении числа n. Например, $l(12) = 3$. Докажите, что есть бесконечно много чисел n со свойством:

(а) $l(n)$ и $l(n + 1)$ оба нечётны;

(б) $l(n)$ и $l(n + 1)$ оба чётны.

Уравнение Пелля - 2

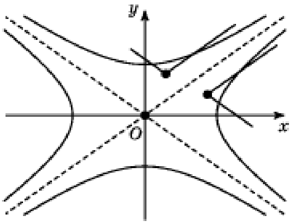
1. Пусть $x_1 + y_1\sqrt{m}, x_2 + y_2\sqrt{m} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$. Оказалось, что $x_1 \equiv x_2 \pmod{n}$ и $y_1 \equiv y_2 \pmod{n}$, где $n = |N(x_2 + y_2\sqrt{m})|$. Докажите, что тогда $x_1 + y_1\sqrt{m}$ делится на $x_2 + y_2\sqrt{m}$.

2. Докажите, что если на некоторой гиперболе

$$\ell_N = \{(x, y) : x^2 - my^2 = N\}$$

лежит бесконечное число целых точек, то уравнение Пелля $x^2 - my^2 = 1$ имеет нетривиальное решение.

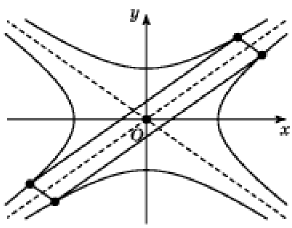
Предположим, что на каждой из гипербол лежит лишь конечное число целых точек. Обозначим A область между гиперболам ℓ_N и ℓ_{-N}. Каждой целой точке из A (кроме $(0,0)$) сопоставим угол как на картинке.



3. Докажите, что на гиперболе ℓ_N найдётся вещественная точка, не покрытая ни одним рассматриваемым углом.

4. **Лемма Минковского**. В центре координатной плоскости расположена выпуклая центрально-симметричная относительно центра координат фигура площади больше 4. Докажите, что в ней найдётся ещё одна целочисленная точка.
Подсказка: рассмотрим все выпуклые фигуры, получающиеся из данной переносами на векторы, обе координаты которых чётны. Могут ли пересекаться две такие фигуры? Что можно сказать про суммарную площадь фигур, центры которых лежат внутри какого-нибудь большого квадрата?

Выберем параллелограмм с непокрытыми вершинами как на картинке.



5. Докажите, что площадь параллелограмма зависит только от N, а не от конкретных точек на гиперболе.

6. Докажите, что у уравнения Пелля $x^2 - my^2 = 1$ существует нетривиальное решение.

7. Предположим, что уравнение $x^2 - my^2 = r$ имеет решение. Как выглядят все решения? Опишите алгоритм их нахождения.

Однородные симметрические неравенства: Мюрхед.

Определение. Пусть дан набор целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, такой что $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_n$. Введём обозначение следующего симметрического многочлена от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$T_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{sym} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

где суммирование ведётся по всем возможным перестановкам переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Примеры.

- $T_{(2,1,0)}(x, y, z) = x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + xz^2$;
- $T_{(1,1,1)}(x, y, z) = 6xyz$;
- $T_{(1,1,0)}(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2zx$.

Ещё определение. Пусть даны два набора целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, такие что $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_n$, $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \dots \geqslant \beta_n$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$. Тогда будем говорить, что α *мажорирует* β (обозначается как $\alpha \succ \beta$), если для любого $1 \leqslant k \leqslant n$ верно

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} \beta_i.$$

Неравенство Мюрхеда. Пусть $\alpha \succ \beta$. Тогда для любых неотрицательных $x_1, x_2, \dots, x_n$ верно:

$$T_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant T_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Дружеский совет. Если у вас неоднородное неравенство, то сделайте его однородным.

1. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x + y)(y + z)(z + x) + xyz \leqslant 3(x^3 + y^3 + z^3).$$

2. Для неотрицательных чисел x, y, z, таких что $x + y + z = 1$, докажите неравенство

$$1 + x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geqslant 4(xy + yz + zx).$$

3. Для неотрицательных чисел x, y, z, таких что $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, докажите неравенство

$$x + y + z \geqslant xy + yz + zx.$$

4. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$

5. Для неотрицательных чисел a, b, c верно $a + b + c = ab + bc + ac$. Докажите, что

$$a + b + c + 1 \geqslant 4abc.$$

6. Пусть сумма положительных чисел $t_1, \ldots, t_n$ равна T. Докажите, что

$$\frac{t_1}{T - t_1} + \ldots + \frac{t_n}{T - t_n} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

7. Для положительных чисел a, b и c, удовлетворяющих условию $a + b + c = 1$, докажите неравенство

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leqslant 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right).$$

8. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите, что

$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \geqslant \frac{7}{1+abc}.$$

ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!

Однородные симметрические неравенства: Шур.

Неравенство Шура. Для положительных x, y, z и натурального n верно

$$\sum_{sym} x^{n+2} + \sum_{sym} x^n yz \geqslant 2 \sum_{sym} x^{n+1} y.$$

В частности при $n = 3$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geqslant x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + xz^2.$$

1. Для неотрицательных чисел x, y, z, таких что $x + y + z = 1$, докажите неравенство

$$1 + 9xyz \geqslant 4(xy + yz + zx).$$

2. Для $x, y, z \geqslant 0$, таких что $x + y + z = 1$, докажите неравенство

$$xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

3. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{c+a}{b+c}.$$

4. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$108 \cdot (ab + bc + ca) \leqslant \left(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}\right)^4.$$

5. Сумма положительных чисел x, y, z равна 1. Докажите, что

$$\left(\frac{x - yz}{x + yz}\right)^2 + \left(\frac{y - zx}{y + zx}\right)^2 + \left(\frac{z - xy}{z + xy}\right)^2 \geqslant \frac{3}{4}.$$

6. Для положительных a, b, c, d докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2.$$

pqr-метод (на минималках)

Для данных a, b, c введём обозначения: $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$.

Рассмотрим теперь всевозможные неотрицательные тройки a, b, c, для которых значения p и q фиксированы.

Теорема.

- Максимальное возможное значение r достигается при $a = b$;
- Минимальное возможное значение r достигается при $a = b$ или $c = 0$.

Пример. Для неотрицательных чисел a, b, c верно $a + b + c = ab + bc + ac$. Докажите, что

$$a + b + c + 1 \geqslant 4abc.$$

Набросок решения: Зафиксируем p, из условия автоматически зафиксируется значение q. Перепишем неравенство через p, q, r: $p + 1 \geqslant 4r$. Заметим, что $p + 1 - 4r$ — это линейная функция от r с отрицательным коэффициентом при r, а значит она принимает минимальное значение когда r — максимально. Тогда нам достаточно доказать неравенство в случае, когда $a = b$, что мы без особого труда сделаем.

1. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что $1 + 9abc \geqslant 4(ab + bc + ca)$.

2. Известно, что $a, b, c > 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажите, что $(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geqslant 8$.

3. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$. Докажите, что

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ac} + \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geqslant 2.$$

4. Неотрицательные числа a, b и c таковы, что никакие два из них не равны 0 одновременно. Докажите неравенство

$$(ab + bc + ca)\left(\frac{1}{(a + b)^2} + \frac{1}{(b + c)^2} + \frac{1}{(c + a)^2}\right) \geqslant \frac{9}{4}.$$

5. Для неотрицательных a, b, c докажите неравенство

$$a^5 + b^5 + c^5 + abc(ab + bc + ca) \geqslant a^2b^2(a + b) + b^2c^2(b + c) + c^2a^2(c + a).$$

6. Числа $a, b, c \geqslant 1$ и $a + b + c = 9$. Докажите, что

$$\sqrt{ab + bc + ac} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

7. Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

2. Геометрия

Двойные отношения и гармонические четверки

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D на одной прямой называется величина
$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

1. Пусть $(A, B; C, D) = x$. Найдите $(B, A; C, D), (C, D; A, B), (C, D; B, A)$.

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки прямых a, b, c, d, пересекающихся в одной точке, называется величина

$$(a, b; c, d) = \frac{sin\angle(\vec{a}, \vec{c})}{sin\angle(\vec{b}, \vec{c})} : \frac{sin\angle(\vec{a}, \vec{d})}{sin\angle(\vec{b}, \vec{d})},$$

где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ – это произвольные векторы, направленные вдоль прямых a, b, c, d соответственно, $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ – ориентированный угол с точностью до 2π.

Определение. Четыре прямые a, b, c, d пересекаются в точке O и пересекают прямые x и y в точках A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Преобразование (чего?), переводящее четверку точек A, B, C, D в четверку точек A_1, B_1, C_1, D_1 называется *центральным проектированием*, а точка O – *центром проектирования*.

2. Четыре различные прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке. Пятая прямая l пересекает их в разных точках A, B, C, D соответственно. Докажите, что $(a, b; c, d) = (A, B; C, D)$. (*Посчитайте площади двумя способами*).

Определение. Четверка точек такая, что $(A, B; C, D) = -1$, называется *гармонической*.

3. Докажите, что следующие четверки точек (либо прямых) гармонические:

(а) A, B, M, ∞, где точка M – середина отрезка AB;

(б) a, b, c, d, где прямые c и d – внутренняя и внешняя биссектрисы угла между прямыми a и b;

(в) B, C, A_1, A_2, где AA_1, BB_1, CC_1 — пересекающиеся в одной точке чевианы в треугольнике ABC, а A_2 — точка пересечения BC и B_1C_1;

(г) Центры двух окружностей и их центры отрицательной и положительной гомотетии составляют гармоническую четверку точек.

(д) Если через точку провести прямую, пересекающую окружность в двух точках, и взять ещё точку пересечения этой прямой с полярой исходной точки, то 4 такие точки образуют гармоническую четвёрку.

4. Прямые a и b пересекаются в точке P. На прямой a взяты точки A, B, C, на прямой b – точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что $(P, A; B, C) = (P, A_1; B_1C_1)$ тогда и только тогда, когда прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

5. Диагонали четырехугольника (не обязательно вписанного) $ABCD$ пересекаются в точке R, а продолжение боковых сторон в точках P и Q.

(а) Пусть T – основание перпендикуляра, опущенного из R на PQ. Докажите, что $\angle ATR = \angle CTR$ и $\angle BTR = \angle DTR$.

(б) Через точку R проведена прямая l, которая параллельна PQ. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой R пополам.

6. Внутренняя и внешняя биссектрисы угла A неравнобедренного треугольника ABC пересекают прямую BC в точках K и L соответственно. Точка M — середина стороны AB. Прямая KM пересекает прямую AC в точке N. Докажите, что $NL = NA$.

7. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Пусть I и J — центры вписанных окружностей треугольников ALC и ALB. Прямая IJ пересекает прямые AB и AC в точках C' и B' соответственно. Докажите, что прямые AL, BB' и CC' пересекаются в одной точке.

8. Пусть H_B — основание высоты треугольника ABC, проведённой из вершины B; L_B основание соответствующей биссектрисы; K_B — точка касания вписанной окружности со стороной AC; T_B — точка касания вневписанной окружности со стороной AC. Точки H_A, L_A, K_A, T_A определяются аналогично. Докажите, что $H_BH_A, L_BL_A, K_BK_A, T_BT_A$ пересекаются в одной точке.

9. В остроугольном треугольнике ABC высоты AD, BE и CF пересекаются в точке H. P и Q — проекции точек A и H на EF соответственно. Пусть R — точка пересечения DP и QH. Найдите HQ/HR.

10. Пусть в треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Пусть X такая точка внутри треугольника ABC, что вписанная окружность треугольника XBC касается XB, XC и BC в Z, Y и D соответственно. Докажите, что $EFZY$ вписанный.

Двойные отношения и гармонические четверки, добавка

1. Дан остроугольный треугольник ABC, пусть H - его ортоцентр. Окружность проходит через точки B, C и пересекает окружность с диаметром AH в двух различных точках X, Y. Точка D - основание высоты из вершины A на сторону BC, а точка K - основание высоты из точки D на прямую XY. Докажите, что $\angle BKD = \angle CKD$.

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки Q, A, B, P лежат на одной прямой именно в таком порядке. Прямая AC касается окружности (ADQ), а прямая BD касается окружности (BCP). Точки M и N - середины BC и AD соответственно. Докажите, что следующие 3 прямые пересекаются в одной точке: прямая CD, касательная к окружности (ANQ) в точке A, касательная к окружности (BMP) в точке B.

3. Остроугольный треугольник $ABC (AB > AC)$ вписан в окружность Ω; точки M и N — середины меньшей и большей дуг BC окружности Ω соответственно. Из точки N опущен перпендикуляр NK на сторону AB. Докажите, что точки A, C, K и середина отрезка AM лежат на одной окружности.

Разнобой для тех, кто все решил

1. Точка A' диаметрально противоположна вершине A на описанной окружности треугольника ABC. На стороне BC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник BCD. Перпендикуляр к $A'D$, проведенный в точке A', пересекает прямые CA и AB в точках E и F соответственно. На отрезке EF построен равнобедренный треугольник ETF с $\angle ETF = 120°$ (точки A и T по разные стороны от EF). Докажите, что AT проходит через центр окружности девяти точек треугольника ABC.

2. Треугольник ABC с инцентром I вписан в окружность Γ Точка M — середина стороны BC. Точки D, E и F выбраны на сторонах BC, CA и AB соответственно так, что $ID \perp BC$, $IE \perp AI$ и $IF \perp AI$. Предположим, что описанная окружность треугольника AEF повторно пересекает Γ в точке X. Докажите, что прямые XD и AM пересекаются на Γ.

3. В неравнобедренном треугольнике ABC точки D, E и G — середины сторон AB, AC и BC соответственно. Окружность Γ проходит через C, касается AB в точке D и пересекает AE и BG в точках X и Y соответственно. Точки X' и Y' симметричны точкам X и Y относительно E и G соответственно. Прямая $X'Y'$ пересекает CD и EG в точках Q и M соответственно. Наконец, прямая CM повторно пересекает Γ в точке P. Докажите, что $CQ = QP$.

4. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки P, Q, R и S соответственно. Отрезки PR и QS пересекаются в точке O. Предположим, что четырехугольники $APOS, BQOP, CROQ$ и $DSOR$ являются описанными. Докажите, что прямые AC, PQ и RS пересекаются в одной точке или параллельны.

5. Окружность Γ проходит через вершину A треугольника ABC и пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно, а описанную окружность треугольника ABC вторично в точке P. Докажите, что точка, симметричная P относительно EF, лежит на BC тогда и только тогда, когда Γ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

6. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, G — центр масс. Пусть D — середина стороны BC, E — точка на окружности с диаметром BC, лежащая внутри треугольника ABC, такая, что $AE \perp BC$. Пусть $F = EG \cap OD$ и точки K и L на прямой BC таковы, что $FK \parallel OB$ и $FL \parallel OC$. Кроме того, точка $M \in AB$ такова, что $MK \perp BC$ и точка $N \in AC$ такова, что $NL \perp BC$. Наконец, окружность ω касается отрезков OB и OC в точках B и C. Если вы дочитали условие до конца, то докажите, что описанная окружность треугольника AMN касается окружности ω.

7. Внутри треугольника ABC дана точка P. Предположим, что L, M и N — середины сторон BC, CA и AB соответственно и $PL : PM : PN = BC : CA : AB$. Продолжения AP, BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках D, E и F соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников $APF, APE, BPF, BPD, CPD, CPE$ лежат на одной окружности.

Двойные отношения на окружности

Определение. *Двойным отношением* $(A, B; C, D)$ четвёрки различных точек A, B, C, D, лежащих на одной окружности, называют величину $(PA, PB; PC, PD)$, где P — произвольная точка той же окружности. Заметим, что эта величина не зависит от выбора точки P.

При этом точка P может совпадать с одной из точек A, B, C, D, и тогда соответствующая секущая вырождается в касательную к окружности.

1. **(а)** Из точки P, лежащей вне окружности, проведены касательные PM и PN (где M и N – точки касания), а также секущая, пересекающая окружность в точках A и B. Прямые MN и AB пересекаются в Q. Докажите, что $(P, Q; A, B) = -1$.

   (б) Докажите, что если двойное отношение четверки точек на окружности равно -1, то они образуют гармонический четырехугольник.

2. В угол BAC вписана окружность ω, касающаяся сторон угла в точках B, C. Хорда CD окружности ω параллельна прямой AB. Прямая AD второй пересекает окружность ω в точке E. Докажите, что прямая CE делит отрезок AB пополам.

3. Докажите, что инверсия сохраняет двойные отношения на обобщенной прямой.

4. Четыре окружности $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ и ω_D касаются окружности ω в точках A, B, C, D соответственно и касаются друг друга по циклу. Все касания внешние. Докажите, что $ABCD$ — гармонический четырёхугольник.

5. Дан треугольник ABC и точка M; прямая, проходящая через M, пересекает AB, BC, CA в C_1, A_1, B_1 соответственно. Прямые AM, BM, CM пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника ABC.

6. **(а)** (**Теорема о бабочке**) Хорды AC и BD окружности ω проходят через середину хорды MN. Отрезки AD и BC пересекают отрезок MN в точках X и Y. Докажите, что $XM = YN$.

   (б) (**Теорема о двойной бабочке**) Хорды AB и CD окружности ω проходят соответственно через точки X' и Y', лежащие на хорде XY, такие что $XX' = YY'$. Отрезки AC и BD пересекают XY в точках P и Q. Докажите, что $XP = YQ$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром O. Биссектриса угла ABD пересекает отрезок AD в точке K и окружность ω второй раз в точке M. Биссектриса угла CBD пересекает отрезок CD в точке L и окружность ω второй раз в точке N. Известно, что прямые KL и MN параллельны. Докажите, что описанная окружность треугольника MON проходит через середину отрезка BD.

8. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC вписан в окружность Ω; отрезки AM и AH – его медиана и высота соответственно. Прямая AH вторично пересекает окружность Ω в точке N. Окружность (MHN) пересекает окружность Ω в точках N и S. Докажите, что прямая AS направлена вдоль симедианы треугольника ABC.

9. На окружности ω взяты точки A, B, C и D в указанном порядке. Пусть O — точка пересечения отрезков AC и BD, а ω_1 и ω_2 — окружности, описанные около треугольников AOB и

COD соответственно. Прямая l проходит через точку O пересекает окружность ω в точках M и N, окружность ω_1 — в точке P и окружность ω_2 — в точке Q. Докажите, что $PM = NQ$.

10. Точки I – инцентр остроугольного треугольника ABC, вписанного в окружность с центром O. На нее меньших дугах BC, CA, AB отмечены точки A', B', C' так, что $A'I$, $B'I$, $C'I$ – биссектрисы углов $CA'B, AB'C, BC'A$ соответственно. Докажите, что AA', BB', CC' пересекаются в одной точке, лежащей на прямой OI.

11. **(а)** На сторонах AB и BC выбраны точки C_1 и A_1 так, что четырехугольник AC_1A_1C вписанный. Прямые CC_1 и AA_1 пересекаются в точке P. Прямая BP пересекает (ABC) в точках B и Q. Обозначим середину отрезка A_1C_1 через M. Докажите, что прямые QC_1 и CM пересекаются на (ABC).

(б) Пусть дан треугольник ABC, в котором проведены высоты AA_1 и CC_1, которые пересекаются в точке H. Опишем вокруг треугольника BA_1C_1 окружность ω. Пусть M - середина отрезка AC, M_1 - середина отрезка A_1C_1, а BB' - диаметр окружности (ABC), который пересекает ω в точках B и N. Докажите, что MN и HM_1 пересекаются на окружности ω.

Двойные отношения на окружности, добавка

1. На стороне BC неравнобедренного треугольника ABC выбираются всевозможные пары симметричных относительно середины отрезка BC точек X, Y. Прямые AX, AY вторично пересекают окружность (ABC) в точках P, Q. Докажите, что все прямые PQ проходят через фиксированную точку.

2. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Обозначим его описанную окружность через Ω, а середину дуги CAB через S. Перпендикуляр из A на BC пересекает BS и Ω в точках D и $E \neq A$ соответственно. Прямая через D, которая параллельна BC, пересекает прямую BE в точке L. Обозначим описанную окружность треугольника BDL через ω. Пусть ω пересекает Ω второй раз в точке $P \neq B$. Докажите, что касательная к ω в точке P и прямая BS пересекаются на внутренней биссектрисе угла BAC.

3. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H и пересекают его описанную окружность ω в точках A', B', C'; M — середина BC. Луч MH пересекает ω в точке X. В треугольники $A'B'X$ и $A'C'X$ вписаны окружности с центрами U и V. Докажите, что $UV \parallel BC$.

Проективные преобразования и ко

Проективным преобразованием проективной плоскости Π назовем преобразование, которое можно представить в виде композиции центральных проекций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ в пространстве.
Проективные преобразования проективной плоскости можно определить как преобразования, переводящие прямые в прямые.

Проективное преобразование однозначно задаётся образами четырёх точек.

1. Докажите, что с помощью одной линейки невозможно разделить данный отрезок пополам. А с помощью двух?

2. Пусть O - точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, а E и F - точки пересечения пар сторон AB и CD, AD и BC соответственно. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках K и L, а прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках M и N. Докажите, что точка X пересечения прямых KN и LM лежит на прямой EF.

3. *(Вспоминаем поляры)* Пусть P - точка внутри окружности, а вписанный четырёхугольник $ABCD$ таков, что P - его точка пересечения диагоналей. Прямые AB и CD пересекаются в точке Q. Докажите, что все возможные точки Q лежат на одной прямой (поляре точки P)

4. **(а)** *(Теорема Паппа)* Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой; точки A_2, B_2, C_2 лежат на другой прямой. Докажите, что точки пересечения пар прямых A_1B_2 и A_2B_1, B_1C_2 и B_2C_1, C_1A_2 и C_2A_1 лежат на одной прямой. **(б)** Сформулируйте и докажите двойственное утверждение к теореме Паппа.

5. **(а)** *(Теорема Дезарга)* Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 лежат на одной прямой (считайте, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ невырожденные). **(б)** Сформулируйте и докажите двойственное утверждение к теореме Дезарга.

6. *(Теорема Паскаля)* Дан выпуклый вписанный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что пересечения пар противоположных сторон этого шестиугольника лежат на одной прямой.

7. **(а)** На листе бумаги нарисованы точка A и две прямые, пересекающиеся в точке B вне листа. При помощи одной линейки нарисуйте на листе прямую AB. **(б)** На листе бумаги отмечены точки A и B, а вот от линейки отрезали концы так, что её длина короче AB. Справьтесь провести прямую AB не смотря на все преграды.

8. Точки P и Q изогонально сопряжены в четырёхугольнике $ABCD$. Докажите, что середины отрезков PQ, AC и BD лежат на одной прямой.

9. Докажите, что любой выпуклый пятиугольник проективно эквивалентен пятиугольнику, образованному точками пересечения его диагоналей.

10. Через вершины A, B и C треугольника ABC провели три попарно параллельные прямые l_a, l_b и l_c, которые пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1 и C_1, а его описанную окружность в точках A_2, B_2 и C_2. Точки A_1, B_1 и C_1 отразили относительно точек A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что три полученные точки лежат на одной прямой.

11. Медиана BM_b пересекает γ в точках P и Q. Точки P' и Q' на γ выбраны таким образом, что $PP' \parallel QQ' \parallel AC$. Прямые BP' и BQ' пересекают AC в точках X и Y. Докажите, что отрезки AX и CY равны.

12. *(Теорема о трижды перспективных треугольниках)* Два треугольника назовём *перспективными*, если прямые, соединяющие их соответственные вершины, пересекаются в одной точке. Известно, что треугольники ABC и $A'B'C'$ перспективны и треугольники ABC и $B'C'A'$ перспективны. Докажите, что треугольники ABC и $C'B'A'$ тоже перспективны.

Линейное движение точек и прямых

Определение. Объект движется линейно, если существует такой вектор $\vec{v}$, что за время t объект параллельно переносится на вектор $t \cdot \vec{v}$.

1. Докажите или опровергните:

(а) Середина отрезка, соединяющего две линейно движущиеся точки, движется линейно. **(б)** Прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку, движется линейно. **(в)** Прямая, проведённая через две линейно движущиеся точки, движется линейно. **(г)** Точка пересечения линейно движущихся прямых движется линейно.

2. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB, AC в точках C_1, B_1 соответственно. На отрезках BC_1, AB_1 отмечены точки P и Q соответственно так, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1.

3. Прямая, перпендикулярная стороне BC треугольника ABC, пересекает его высоты BH и CH в точках P и Q соответственно, а сторону BC - в точке M. Докажите, что ортоцентр треугольника HPQ лежит на прямой AM.

4. На стороне AC треугольника ABC с центром описанной окружности O выбрана точка M, а на сторонах AB и BC - точки K и N так, что точка K равноудалена от точек A и M, а точка N равноудалена от точек M и C. **(а)** Докажите, что четырёхугольник $NBKO$ вписанный **(б)** Пусть H — ортоцентр треугольника MNK. Докажите, что $HO \parallel AC$.

5. **Теорема.** Если три линейно движущиеся точки лежат на одной прямой в три различных момента времени, то они всегда лежат на одной прямой.

6. Пусть H - ортоцентр треугольника ABC. Пусть точка P движется по описанной окружности треугольника ABH, а A_1 и B_1 - пересечения прямых AP и BP со сторонами BC и AC треугольника ABC. Найдите ГМТ середин отрезков A_1B_1.

7. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Общие внешние касательные к окружностям (ABC) и (CDA) пересекаются в точке P, а общие внешние касательные к окружностям (BCD) и (DAB) пересекаются в точке Q. Докажите, что точки P, Q и E лежат на одной прямой.

8. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Прямая XY пересекает окружность (ABC) в точках P и Q. Докажите, что середины отрезков BY, CX, XY и PQ лежат на одной окружности.

9. В треугольнике ABC на радиусах вписанной окружности, проведённых из её центра I к сторонам AB, BC и AC отметили точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что отрезки IC_1, IB_1 и IA_1 попарно равны. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

10. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке K. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок $A'K$ пересекает окружность (APQ) в точке S. Докажите, что окружность (BSC) касается окружности (APQ).

Линейное движение, добавка

1. В треугольнике точки M, N изогонально сопряжены. На прямых BM, CM, BN, CN выбраны точки P, Q, R, S соответственно так, что $PR \parallel QS \parallel MN$. Докажите, что точки A, P, Q, M лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда точки A, R, S, N лежат на одной окружности.

2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ и произвольная точка X. Пусть $X_{AB}, X_{BC}, X_{CD}, X_{DA}$, X_{AC}, X_{BD} - проекции точки X на прямые AB, BC, CD, DA, AC и BD соответственно. Докажите, что середины отрезков $X_{AB}X_{CD}, X_{BC}X_{DA}$ и $X_{AC}X_{BD}$ лежат на одной прямой.

3. Рассмотрим произвольный треугольник ABC с центром вписанной окружности I. Прямая ℓ пересекает прямые AI, BI и CI соответственно в точках D, E и F, отличных от A, B и C и I. Серединные перпендикуляры к отрезкам AD, BE и CF образуют треугольник Δ с описанной окружностью ω. Докажите, что окружности ω и (ABC) касаются.

Проективное движение

1. На продолжении стороны CD за точку D прямоугольника $ABCD$ отмечена точка P; точки M и N — середины сторон AD, BC соответственно. Прямые PM и AC пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая NM — биссектриса угла PNQ.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD. На его сторонах AB и AC вовне построены подобные прямоугольные треугольники ABU и ACV ($\angle ABU = \angle ACV = 90°, \angle BAU = \angle CAV$). Докажите, что прямые BV и CU пересекаются на прямой AD.

3. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P. Точки A_1 и C_1 — середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A_1 на CP, пересекается с перпендикуляром, опущенным из C_1 на AP, в точке K. Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C.

Если в конструкции очередного изучаемого отображения много окружностей, то инверсия поможет вам убедиться в сохранении двойных отношений.

4. Остроугольный равнобедренный треугольник $ABC (AB = AC)$ вписан в окружность Ω. На меньшей дуге BC отмечена произвольная точка X. Касательная к Ω в точке X пересекает касательные к Ω из точек B и C в точках P и Q соответственно. Докажите, что длина отрезка, высекаемого прямыми AP и AQ на прямой BC, не зависит от выбора точки X.

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отмечена середина M стороны BC и основание H высоты AH. Внутри треугольника нашлись такие точки P и Q, то $\angle BAP = \angle CAQ$ и $\angle BPA = \angle CQA = 90°$. Докажите, что точки M, H, P, Q лежат на одной окружности.

6. AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Окружность ω_A касается стороны BC в точке A_1 и "меньшей" дуги BC описанной окружности треугольника ABC в точке A_2. Аналогично определены точки B_2 и C_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2.

7. Пусть $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$— вневписанные окружности треугольника ABC, касающиеся сторон BC, CA и AB соответственно. Обозначим через l_a общую внешнюю касательную окружностей γ_b и γ_c, отличную от BC. Аналогично определим прямые l_b, l_c. Из точки P, лежащей на l_a, проведем отличную от l_a касательную к γ_b и найдем точку X ее пересечения с l_c. Аналогично найдем точку Y пересечения касательной из P к γ_c с l_b. Докажите, что прямая XY касается γ_a.

8. 2025 прямых пересекаются в одной точке. В каждый из 4050-и углов вписано по окружности; окружности касаются друг друга по циклу. На сторонах углов отмечено по точке. Известно, что для всех углов, кроме одного, отрезок, соединяющий отмеченные точки на сторонах, касается вписанной в угол окружности. Докажите, что для оставшегося угла это также верно.

3. Комбинаторика

Теория Рамсея

Упражнение. На олимпиаду пришли 6 человек. Докажите, что либо найдётся три человека, которые попарно друг друга знают, либо три человека, которые попарно друг друга не знают.

Определение. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_\ell$ — натуральные числа. *Числом Рамсея* $R(n_1, n_2, \ldots, n_\ell)$ называется такое наименьшее натуральное число, что всякая раскраска рёбер графа с $R(n_1, n_2, \ldots, n_\ell)$ вершинами в ℓ цветов для какого-то i содержит полный подграф цвета i размера n_i.

1. **(а)** Докажите, что $R(3, 4) \leqslant 10$.

   (б) Докажите, что $R(3, 4) \leqslant 9$.

2. Докажите, что

   (а) $R(m, n) \leqslant R(m-1, n) + R(m, n-1)$;

   (б) $R(m, n) \leqslant \binom{n+m-2}{n-1}$.

3. Пусть всякие два человека могут либо дружить, либо враждовать либо быть незнакомыми. Докажите, что среди 17 человек всегда найдутся трое попарно дружащих, или трое попарно враждующих, или трое попарно незнакомых.

Замечание. Таким образом, $R(3, 3, 3) \leqslant 17$. На самом деле $R(3, 3, 3) = 17$.

4. Для всех $l \geqslant 2$ докажите неравенство
$$R(n_1, n_2, \ldots, n_\ell) \leqslant \binom{n_1 + n_2 + \ldots + n_\ell - \ell}{n_1 - 1,\ n_2 - 1,\ \ldots,\ n_\ell - 1}.$$

5. В некотором множестве выбрали бесконечное количество конечных подмножеств одинакового размера. Докажите, что можно выбрать 2022 из них так, чтобы любые два различных пересекались по одному и тому же количеству элементов.

6. **Теорема Шура.** Натуральные числа раскрашены в k цветов. Докажите, что найдётся одноцветное решение уравнения $x + y = z$.

7. **(а)** Даны $m+1$ ненулевых вычетов по простому модулю p. Докажите, что отношение каких-то двух — точная m-я степень некоторого вычета.

   (б) Докажите, что для любого натурального m при достаточно больших простых p существует нетривиальное решение уравнения
$$x^m + y^m \equiv z^m \mod p.$$

8. Все трёхэлементные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ раскрашены в два цвета. Докажите, что при всех достаточно больших n найдётся такое подмножество $\{x_1, \ldots, x_{100}\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, в котором все тройки $\{x_i, x_j, x_k\}$ одноцветные.

9. **Теорема Эрдеша–Секереша.** Докажите, что при всех достаточно больших n среди любых n точек плоскости в общем положении можно выделить вершины некоторого выпуклого 100-угольника.

Теория Рамсея. Добавка

1. В классе учится $2n$ школьников, по n девочек и мальчиков. На досуге каждая пара из мальчика и девочки любит обсуждать либо футбол, либо волейбол. Докажите, что при достаточно большом n найдутся 10 мальчиков и 10 девочек, среди которых все пары на досуге обсуждают один и тот же вид спорта.

Определение. Пусть H_1, H_2 — два данных графа. *Число Рамсея* $R(H_1, H_2)$ — это наименьшее натуральное n, для которого при любой раскраске рёбер полного графа на n вершинах в два цвета обязательно найдётся подграф, изоморфный H_1, с рёбрами цвета 1 или подграф, изоморфный H_2, с рёбрами цвета 2.

2. Даны натуральные числа $k, m > 1$ и некоторое дерево T_m на m вершинах. Найдите $R(T_m, K_k)$.

3. Рассмотрим n-мерный куб $m \times m \times \ldots \times m$. Назовём *линией* такую последовательность $X_1, \ldots, X_m$ клеток куба, что у этих клеток в каждой координате значения либо одинаковые, либо равны $1, 2, \ldots, m$ именно в таком порядке.

Hales-Jewett theorem. Даны натуральные числа k, m. Тогда есть такое натуральное число $n = n(k, m)$, что при любой раскраске клеток n-мерного куба $\mathcal{M}^n = m \times m \times \ldots \times m$ в k цветов найдётся линия из m клеток, раскрашенная в один цвет.

Докажем теорему Хайлса-Джеветта индукцией по m. Индукционное предположение ИП(m) звучит так: пусть утверждение теоремы справедливо для данного m и любого числа цветов k.

(а) Докажите, что если выполнено ИП(m), то найдутся такие натуральные числа n и N, что при любой раскраске куба $\mathcal{M}^{n+N}$ можно выделить такие линии $X_1, \ldots, X_m \in \mathcal{M}^n$ и $Y_1, \ldots, Y_m \in \mathcal{M}^N$, что все клетки (X_i, Y_j) — одноцветные.

(б) Докажите, что если выполнено ИП(m), то теорема верна для куба со стороной $m + 1$ и двух цветов.

(в) Докажите, что если выполнено ИП(m), то теорема верна для куба со стороной $m + 1$ и любого наперёд заданного числа цветов.

4. Выведите из теоремы Хейлса-Джеветта теорему Ван дер Вардена: для любой раскраски натурального ряда в конечное число цветов в нём можно найти сколько угодно длинную одноцветную арифметическую прогрессию.

Теорема Турана

Определение. Подмножество вершин графа G называется *независимым*, если любые две его вершины не соединены ребром.

Определение. *Независимым числом* графа называется размер его максимального независимого множества.

Теорема 1. В графе G на n вершинах независимое число не превосходит α. Тогда число рёбер графа G не меньше, чем число рёбер графа на n вершинах, состоящего из α почти равных клик.

Теорема 2. В графе G на n вершинах нет клик размера k. Тогда число рёбер графа G не превосходит числа рёбер полного $(k-1)$-дольного графа на n вершинах с почти равными долями.

1. Докажите теорему Турана.

2. Каждое ребро некоторого графа на 60 вершинах покрашено в красный или синий цвет так, что нет одноцветного треугольника. Какое наибольшее количество рёбер может быть в таком графе?

3. В стране 210 городов и совсем нет дорог. Король хочет построить несколько дорог с односторонним движением так, чтобы для любых трёх городов A, B, C, между которыми есть дороги, ведущие из A в B и из B в C, не было бы дороги, ведущей из A в C. Какое наибольшее число дорог он сможет построить?

4. За круглым столом сидят n человек. Разрешается поменять местами любых двух людей, сидящих рядом. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате каждые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?

5. На плоскости дано множество S из $3n$ точек диаметра 1. Каково максимально возможное количество пар точек, расстояние между которыми строго больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

6. **(а)** Есть $2n+1$ батарейка ($n > 2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?
   (б) Та же задача, но батареек $2n$ ($n > 2$), причём хороших и плохих поровну.

7. На плоскости отмечено $4n$ точек. Соединим отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1. Известно, что среди любых $n+1$ точек обязательно найдутся две, соединённые отрезком. Докажите, что проведено хотя бы $7n$ отрезков.

8. Каково наибольшее возможное количество полных подграфов размера k в графе на n вершинах, не содержащем полного подграфа на $k+1$ вершине?

Непрерывность в КГ

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in [a, b]$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такая $\delta > 0$, что для каждого $x \in [a, b]$ выполнено $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Теорема. Непрерывная функция f на отрезке $[a, b]$ принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

1. Докажите или опровергните: для любого **(а)** выпуклого; **(б)** не обязательно выпуклого многоугольника и любого направления существует прямая данного направления, делящая периметр пополам.

2. Дан (не обязательно выпуклый) многоугольник и точка P, лежащая **(а)** вне; **(б)** внутри выпуклой оболочки его вершин. Докажите, что существует прямая через точку P, делящая площадь пополам. Единственна ли такая прямая?

3. Докажите, что для любого выпуклого многоугольника существует прямая, делящая пополам и площадь, и периметр.

4. На плоскости отмечены две системы точек: $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$. Выяснилось, что для любой точки P плоскости
$$|PA_1| + |PA_2| + \ldots + |PA_n| \neq |PB_1| + |PB_2| + \ldots + |PB_n|.$$
Докажите, что центры масс систем $\{A_1, \ldots, A_n\}$, $\{B_1, \ldots, B_n\}$ совпадают.

5. На плоскости даны два (не обязательно выпуклых) многоугольника. Докажите, что есть прямая, делящая площадь каждого из них пополам. *Бутерброд из хлеба и колбасы можно разрезать на две равные по хлебу и колбасе части.*

6. Пабло нарисовал на плоскости квадрат, на каждой стороне (или продолжении стороны) отметил по точке, а затем стёр квадрат. Оказалось, что никакие два из шести отрезков, соединяющих эти четыре точки, не перпендикулярны. Казимир хочет восстановить квадрат Пабло. Какое наименьшее число способов это сделать может быть?

7. Докажите, что через любой выпуклый многоугольник можно провести две перпендикулярные прямые, делящие его на 4 равные по площади части.

8. У Эванжелисты есть «делилка на троих» для блинов. Она представляет собой три луча из одной точки под углами 120° друг к другу. Делилку можно параллельно переносить вдоль любых векторов плоскости, но нельзя поворачивать. Докажите, что любой выпуклый многоугольный блин можно разделить делилкой на три равные по площади части.

Непрерывность в КГ. Добавка

1. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике найдутся две равные непересекающиеся хорды, делящие его площадь на три равные части.

2. Внутри выпуклого многоугольника A лежит выпуклый многоугольник B, их контуры не пересекаются. Назовём хорду многоугольника A *опорной*, если она пересекает многоугольник B только по точкам контура (по вершине или по стороне). Докажите, что найдутся две опорные хорды, середины которых принадлежат контуру многоугольника B.

3. (**Теорема Борсука-Улама**) Для любой пары непрерывных вещественнозначных функций f и g на сфере найдётся пара диаметрально противоположных точек, в которых функция f принимает одинаковые значения и функция g принимает одинаковые значения.
(а) Выведите из теоремы Борсука-Улама теорему о бутерброде: бутерброд в $\mathbb{R}^3$ из хлеба, колбасы и сыра можно разрезать плоскостью на две равные и по объёму хлеба, и по объёму колбасы, и по объёму сыра части (здесь хлеб, сыр, колбаса — ограниченные тела).
(б) Докажите теорему Борсука-Улама.
Почему-то вспомнилось следующее доказательство обычной теоремы о промежуточном значении для непрерывной функции f на отрезке $[a, b]$.
(1) Покрасим точки отрезка $[a, b]$ в два цвета: где $f(x)$ меньше промежуточного значения и где больше.
(2) Для любого конечного разбиения отрезка на отрезочки есть отрезочек с разноцветными концами.
(3) Подойдёт любая предельная точка последоватености разноцветных отрезочков всё более мелких разбиений.

4. Докажите, что в контур любого выпуклого многоугольника можно вписать прямоугольник.

Непрерывная комбинаторика

1. В домике Копатыча припасены 15 бочонков мёда различных объёмов. Докажите, что Копатыч может разлить один бочонок на два новых так, чтобы полученные 16 бочонков можно было разбить на две группы по 8 с равным суммарным объёмом мёда.

2. Дан набор из 99 положительных чисел с суммой S. Докажите, что есть не менее 2^{49} способов выбрать 50 из них с суммой строго больше $S/2$.

3. В 99 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов.

4. Группа в детском саду насчитывает 30 детей. Дети встали в ряд так, что возрасты любых двух соседних детей различаются не более чем на 1 год.
(а) Докажите, что воспитатель может построить детей парами в ряд так, чтобы в любых двух соседних в ряду парах суммарный возраст отличался не более чем на 1 год.
(б) Докажите, что воспитатель может построить детей тройками в ряд так, чтобы в любых двух соседних в ряду тройках суммарный возраст отличался не более чем на 1 год.
(в) На городской ёлке 30 детей взялись за руки в хоровод так, что возрасты любых двух соседей различаются не более чем на 1 год. Докажите, что можно разбить детей на пары и расставить пары по кругу так, чтобы суммарный возраст в каждых двух соседних парах различался бы не более чем на 1 год.

5. На продуктовом складе валяются 20 кусков сыра разных сортов. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков так, чтобы сыр можно было разложить на две кучки, равные по весу и по цене.

6. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

7. На нескольких карточках записаны вещественные числа (по одному на каждой). Игра с дилером проходит так: каждый ход дилер вскрывает одну карточку из колоды, а игрок должен положить карточку в одну из стопок либо создать новую стопку. При этом в любой момент времени числа на карточках из одной стопки должны различаться не болеее чем на 1. Игра заканчивается, когда заканчиваются карты у дилера. Петя сыграл в игру с дилером один раз, создав в процессе игры 10 стопок. Докажите, что Вася при игре с дилером на той же колоде гарантированно сможет создать не более 19 стопок.

8. В 100 ящиках лежат яблоки, апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется не менее половины всех яблок, не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.

Вариация и катастрофы

1. На отрезке AB отмечено $2n$ различных точек, симметричных относительно середины AB. При этом n из них покрашены в красный цвет, оставшиеся n — в синий. Докажите, что сумма расстояний от точки A до красных точек равна сумме расстояний от точки B до синих точек.

2. Внутри выпуклого 100-угольника отмечена точка X, не лежащая ни на какой диагонали. Докажите, что количество треугольников с вершинами в вершинах исходного 100-угольника, содержащих точку X, чётно.

3. На окружности выписаны несколько вещественных чисел из отрезка $[0, 1]$. Докажите, что окружность можно разбить на 2024 дуги так, чтобы суммы чисел на соседних дугах отличались не более чем на 1 (сумму чисел на дуге без чисел считаем равной 0).

4. Можно ли нарисовать на плоскости полный граф K_{101} так, чтобы его вершины были в точках общего положения, рёбра — отрезками, и чтобы в точности 4 000 000 пар его рёбер пересекались (по внутренним точкам)?

5. На прямой отмечены $2n$ различных точек, при этом n из них покрашены в красный цвет, остальные n — в синий. Докажите, что сумма попарных расстояний между точками одного цвета не превосходит суммы попарных расстояний между точками разного цвета.

6. На плоскости проведены $n \geqslant 3$ прямых общего положения. Прямые раскрашены в красный и синий цвет, оба цвета присутствуют. Докажите, что среди частей, на которые делям плоскость прямые, найдётся треугольник, у которого не все стороны одного цвета.

7. *Хромой ладьёй* назовём ладью, которая за один ход может сдвинуться только на одну клетку. Хромая ладья за 64 хода обошла все клетки шахматной доски и вернулась на исходную клетку. Докажите, что число её ходов по горизонтали не равно числу ходов по вертикали.

8. На плоскости нарисованы n различных окружностей, никакие три окружности не пересекаются в одной точке. Улитка Турбо начинает ползти вдоль какой-то окружности против часовой стрелки. Как только она попадает в точку пересечения двух окружностей, она меняет окружность и продолжает ползти против часовой стрелки уже по следующей окружности. В какой-то момент оказалость, что Турбо целиком проползла все окружности. Докажите, что n нечётно.

Часть II

Группа 10–2

1. Алгебра

Симметрические многочлены

Определение. Многочлен от нескольких переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любых перестановках переменных.

Определение. *Элементарным симметрическим многочленом* называется многочлен

$$\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}.$$

Основная теорема. Всякий симметрический многочлен единственным образом представляется в виде многочлена от элементарных симметрических. Коэффициенты этого многочлена — целочисленные линейные комбинации коэффициентов исходного многочлена.

Лемма 1. Пусть $u = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ — старший одночлен (относительно лексикографического порядка) симметрического многочлена. Тогда $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n$.

Лемма 2. Для любого одночлена $u = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ с $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0$ существуют такие целые неотрицательные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$, что старший одночлен многочлена $\sigma_1^{m_1} \sigma_2^{m_2} \ldots \sigma_n^{m_n}$ совпадает с u.

1. **(а)** Докажите лемму 1.

   (б) Докажите лемму 2.

   (в) Проведя индукцию по лексикографическому порядку, докажите существование представления из формулировки теоремы.

   (г) Предположив, что существует два различных представления и сократив все совпадающие члены, рассмотрите старший одночлен и докажите единственность представления.

2. Выразите $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

3. Про целые числа a, b, c известно, что $a + b + c = 0$. Докажите, что число $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ является точным квадратом.

4. Даны вещественные числа a, b, c и x, y, z, причём

   $$a + b + c = x + y + z, \quad a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad a^3 + b^3 + c^3 = x^3 + y^3 + z^3.$$

   Докажите, что $a^{2024} + b^{2024} + c^{2024} = x^{2024} + y^{2024} + z^{2024}$.

5. Многочлен $x^{2024} + y^{2024}$ выразили через элементарные симметрические как $P(xy, x + y)$. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена P.

6. **Рекуррентная формула Ньютона.** Обозначим $p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$. Докажите, что при $1 \leqslant k \leqslant n$ имеет место равенство

   $$p_k - p_{k-1}\sigma_1 + \ldots + (-1)^{k-1} p_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k \sigma_k = 0.$$

   Как должна выглядеть формула при $k > n$?

7. Дано нечётное простое число p. Многочлен с целыми коэффициентами называется *перестановочным* по модулю p, если среди его значений в целых точках встречаются все возможные остатки при делении на p. Докажите, что у нелинейного приведённого перестановочного многочлена степень не может быть делителем числа $p-1$.

Симметрические многочлены - 2

1. Дан многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что любой симметрический многочлен от его (комплексных) корней есть рациональное число.

2. Докажите основную теорему о симметрических многочленах от нескольких наборов переменных. Если многочлен не меняется от перестановки переменных внутри наборов $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, \ldots$, то его можно выразить через основные симметрические многочлены от $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, \ldots$ (и через оставшиеся переменные).
Пример: $(t-x_1-y_1)(t-x_2-y_1)(t-x_1-y_2)(t-x_2-y_2)$ выражается через t и $x_1+x_2, x_1x_2, y_1+y_2, y_1y_2$.

Определение. Комплексное число α называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с рациональными коэффициентами.

3. Пусть α, β — алгебраические числа. Докажите, что числа **(а)** $-\alpha$; **(б)** α^{-1}; **(в)** $\alpha+\beta$ и $\alpha\beta$ также являются алгебраическими.

4. Юра посчитал произведение всех 2^{100} чисел вида
$$\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \ldots \pm \sqrt{99} \pm \sqrt{100}.$$
Докажите, что число, которое он получил, является **(а)** целым; **(б)** квадратом целого числа.

5. Все корни приведённого многочлена с целыми коэффициентами имеют модуль 1. Докажите, что все они являются корнями из единицы.

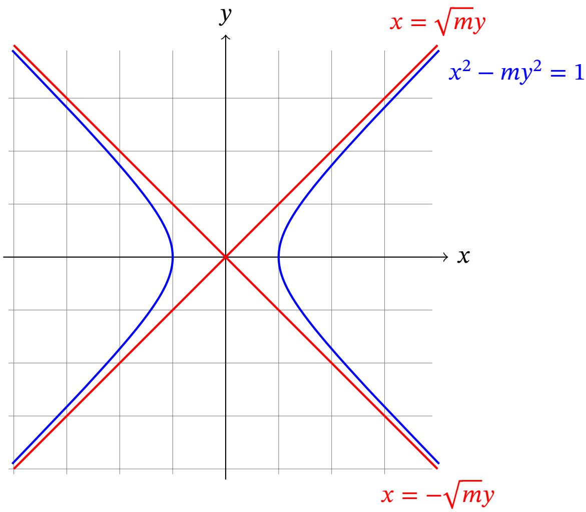
Уравнение Пелля. Теория

Определение. *Уравнением Пелля* называется диофантово уравнение

$$x^2 - my^2 = 1,$$

где m — натуральное число, не являющееся точным квадратом. Решение (x_0, y_0) называется *нетривиальным*, если $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$.

Геометрический смысл. Любая целочисленная точка, кроме $(0, 0)$, лежит на одной из гипербол ℓ_N, задаваемой уравнением $x^2 - my^2 = N$, где N — целое ненулевое число. Асимптотами таких гипербол являются прямые $x = \sqrt{m}y$ и $x = -\sqrt{m}y$. Решение уравнения Пелля равносильно нахождению всех целочисленных точек гиперболы ℓ_1.



Пример: $x^2 - 2y^2 = 1$.

1. Если (x, y) — решение, то $(3x + 4y, 2x + 3y)$ — тоже решение.
2. Определим $(x_0, y_0) = (1, 0)$ и $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (3x_i + 4y_i, 2x_i + 3y_i)$. Хочется доказать, что (x_i, y_i) — **все** неотрицательные решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$. Для доказательства используем то, что отображение $(x, y) \mapsto (3x + 4y, 2x + 3y)$ имеет обратное $(x, y) \mapsto (3x - 4y, 3y - 2x)$.
3. Преобразование $(x, y) \mapsto (3x + 4y, 2x + 3y)$ сдвигает точки по правой ветви гиперболы ℓ_N, увеличивая y (здесь x, y не обязательно целые).
4. Если (x, y) — неотрицательное решение и $3y - 2x < 0$, то $(x, y) = (1, 0)$. Таким образом, (x_i, y_i) — это все решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$.

Алгебраический смысл

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right] = \{a + b\sqrt{m} \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$. В этом кольце есть операция *сопряжения*

$$\overline{a + b\sqrt{m}} = a - b\sqrt{m}.$$

Определим *норму* элемента

$$N\left(a + b\sqrt{m}\right) = a^2 - mb^2 = \left(a + b\sqrt{m}\right) \cdot \overline{a + b\sqrt{m}}.$$

Норма и сопряжение обладают хорошими свойствами: для $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$ выполнено

- $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$;
- $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$;
- $N(\alpha\beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$.

$\boxed{\text{Решить уравнение Пелля } x^2 - my^2 = 1 \Leftrightarrow \text{найти все элементы кольца } \mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right] \text{ нормы 1}}$

Некоторые элементы в кольцах бывают *обратимыми*. В $\mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$ это в точности элементы с нормой ± 1.

Пусть (x_1, y_1) — нетривиальное положительное решение уравнение Пелля с наименьшим x_1 ($\Leftrightarrow$ с наименьшим y_1). Оно называется *фундаментальным*.

Тогда $N\left((x_1 + y_1\sqrt{m})^k\right) = 1$, то есть мы нашли бесконечную серию решений. Докажем, что это все положительные решения. Отображение

$$x + y\sqrt{m} \mapsto (x_1 + y_1\sqrt{m}) \cdot (x + y\sqrt{m}) = (x_1 x + m y_1 y) + (x_1 y + y_1 x)\sqrt{m}$$

(в координатном виде его можно записать $(x, y) \mapsto (x_1 x + m y_1 y, x_1 y + y_1 x)$) есть наше таинственное отображение. А обратное к нему — это умножение на $\left(x_1 + y_1\sqrt{m}\right)^{-1}$.

Умножение на $x_1 + y_1\sqrt{m}$ переводит точки с правой ветви гиперболы ℓ_1 на неё же, сохраняя при этом порядок точек (по координате y).

Лемма о монотонности. Сопоставим точке (x, y), $x > 0$, вещественное число $x + y\sqrt{m}$. Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ — два решения уравнения Пелля. Тогда

$$y_1 < y_2 \Longleftrightarrow x_1 + y_1\sqrt{m} < x_2 + y_2\sqrt{m}.$$

Теорема. Числа $\pm\left(x_1 + y_1\sqrt{m}\right)^k$, $k \in \mathbb{Z}$ — это все элементы кольца $\mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$ с нормой 1, то есть все решения уравнения Пелля.

Замечание. В координатном виде решения уравнения Пелля — это пары

$$\pm\left(\frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{m}\right)^k + \left(x_1 - y_1\sqrt{m}\right)^k}{2}, \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{m}\right)^k - \left(x_1 - y_1\sqrt{m}\right)^k}{2\sqrt{m}}\right).$$

Уравнение Пелля. Задачи

Теперь можно забыть почти всё вышесказанное.

1. **(а)** Докажите, что элемент $\alpha \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$ обратим (то есть существует такой элемент β того же кольца, что $\alpha\beta = 1$) тогда и только тогда, когда $N(\alpha) = \pm 1$.

(б) Пусть (x, y) — решение уравнение Пелля, $\eta = x + y\sqrt{m}$. Тогда

$$\eta > 1 \Longleftrightarrow x > 0, y > 0 \quad \text{и} \quad 0 < \eta < 1 \Longleftrightarrow x > 0, y < 0.$$

(в) Забыв про гиперболы, про преобразования, и помня только о нормах и предыдущем пункте, докажите основную теорему о решениях уравнения Пелля.

2. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 6xy + y^2 = 1$.

3. Пифагорова тройка $(3, 4, 5)$ такова, что длины катетов отличаются на 1. А сколько всего пифагоровых троек с этим свойством?

4. Докажите, что если разность двух последовательных кубов равна n^2, то $2n - 1$ — точный квадрат.

5. Рассмотрим уравнение $x^2 - my^2 = r$, $r \in \mathbb{Z}$, $r \neq 0$, $m > 0$ — не квадрат.

(а) Приведите пример такого уравнения, у которого нет решений.

(б) Докажите, что это уравнение либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений. Как явно выписать *какую-нибудь* бесконечную серию решений?

6. Пусть $l(n)$ — количество простых чисел в разложении числа n. Например, $l(12) = 3$. Докажите, что есть бесконечно много чисел n со свойством:

(а) $l(n)$ и $l(n+1)$ оба нечётны;

(б) $l(n)$ и $l(n+1)$ оба чётны.

Уравнение Пелля - 2

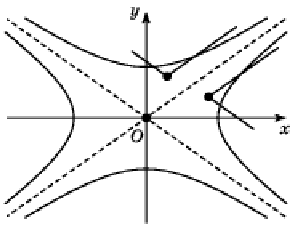
1. Пусть $x_1 + y_1\sqrt{m}, x_2 + y_2\sqrt{m} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$. Оказалось, что $x_1 \equiv x_2 \pmod{n}$ и $y_1 \equiv y_2 \pmod{n}$, где $n = |N(x_2 + y_2\sqrt{m})|$. Докажите, что тогда $x_1 + y_1\sqrt{m}$ делится на $x_2 + y_2\sqrt{m}$.

2. Докажите, что если на некоторой гиперболе

$$\ell_N = \{(x, y) : x^2 - my^2 = N\}$$

лежит бесконечное число целых точек, то уравнение Пелля $x^2 - my^2 = 1$ имеет нетривиальное решение.

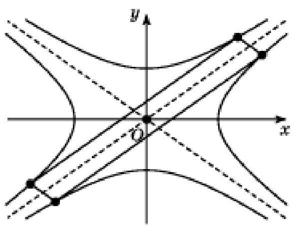
Предположим, что на каждой из гипербол лежит лишь конечное число целых точек. Обозначим A область между гиперболам ℓ_N и ℓ_{-N}. Каждой целой точке из A (кроме $(0,0)$) сопоставим угол как на картинке.



3. Докажите, что на гиперболе ℓ_N найдётся вещественная точка, не покрытая ни одним рассматриваемым углом.

4. **Лемма Минковского**. В центре координатной плоскости расположена выпуклая центрально-симметричная относительно центра координат фигура площади больше 4. Докажите, что в ней найдётся ещё одна целочисленная точка.
Подсказка: рассмотрим все выпуклые фигуры, получающиеся из данной переносами на векторы, обе координаты которых чётны. Могут ли пересекаться две такие фигуры? Что можно сказать про суммарную площадь фигур, центры которых лежат внутри какого-нибудь большого квадрата?

Выберем параллелограмм с непокрытыми вершинами как на картинке.



5. Докажите, что площадь параллелограмма зависит только от N, а не от конкретных точек на гиперболе.

6. Докажите, что у уравнения Пелля $x^2 - my^2 = 1$ существует нетривиальное решение.

7. Предположим, что уравнение $x^2 - my^2 = r$ имеет решение. Как выглядят все решения? Опишите алгоритм их нахождения.

Однородные симметрические неравенства: Мюрхед.

Определение. Пусть дан набор целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, такой что $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$. Введём обозначение следующего симметрического многочлена от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$T_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{sym} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

где суммирование ведётся по всем возможным перестановкам переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Примеры.

- $T_{(2,1,0)}(x, y, z) = x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + xz^2$;
- $T_{(1,1,1)}(x, y, z) = 6xyz$;
- $T_{(1,1,0)}(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2zx$.

Ещё определение. Пусть даны два набора целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, такие что $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$, $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n$ и $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$. Тогда будем говорить, что α *мажорирует* β (обозначается как $\alpha \succ \beta$), если для любого $1 \leqslant k \leqslant n$ верно

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} \beta_i.$$

Неравенство Мюрхеда. Пусть $\alpha \succ \beta$. Тогда для любых неотрицательных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ верно:

$$T_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant T_\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Дружеский совет. Если у вас неоднородное неравенство, то сделайте его однородным.

1. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x + y)(y + z)(z + x) + xyz \leqslant 3(x^3 + y^3 + z^3).$$

2. Для неотрицательных чисел x, y, z, таких что $x + y + z = 1$, докажите неравенство

$$1 + x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geqslant 4(xy + yz + zx).$$

3. Для неотрицательных чисел x, y, z, таких что $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, докажите неравенство

$$x + y + z \geqslant xy + yz + zx.$$

4. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$

5. Для неотрицательных чисел a, b, c верно $a+b+c=ab+bc+ac$. Докажите, что

$$a+b+c+1 \geqslant 4abc.$$

6. Пусть сумма положительных чисел $t_1, \ldots, t_n$ равна T. Докажите, что

$$\frac{t_1}{T-t_1}+\ldots+\frac{t_n}{T-t_n} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

7. Для положительных чисел a, b и c, удовлетворяющих условию $a+b+c=1$, докажите неравенство

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c} \leqslant 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right).$$

8. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите, что

$$\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab} \geqslant \frac{7}{1+abc}.$$

ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!

Однородные симметрические неравенства: Шур.

Неравенство Шура. Для положительных x, y, z и натурального n верно

$$\sum_{sym} x^{n+2} + \sum_{sym} x^n yz \geqslant 2 \sum_{sym} x^{n+1} y.$$

В частности при $n = 3$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geqslant x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + xz^2.$$

1. Для неотрицательных чисел x, y, z, таких что $x + y + z = 1$, докажите неравенство

$$1 + 9xyz \geqslant 4(xy + yz + zx).$$

2. Для $x, y, z \geqslant 0$, таких что $x + y + z = 1$, докажите неравенство

$$xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

3. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{c+a}{b+c}.$$

4. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$108 \cdot (ab + bc + ca) \leqslant \left(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}\right)^4.$$

5. Сумма положительных чисел x, y, z равна 1. Докажите, что

$$\left(\frac{x - yz}{x + yz}\right)^2 + \left(\frac{y - zx}{y + zx}\right)^2 + \left(\frac{z - xy}{z + xy}\right)^2 \geqslant \frac{3}{4}.$$

6. Для положительных a, b, c, d докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2.$$

pqr-метод (на минималках)

Для данных a, b, c введём обозначения: $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$.

Рассмотрим теперь всевозможные неотрицательные тройки a, b, c, для которых значения p и q фиксированы.

Теорема.

- Максимальное возможное значение r достигается при $a = b$;
- Минимальное возможное значение r достигается при $a = b$ или $c = 0$.

Пример. Для неотрицательных чисел a, b, c верно $a + b + c = ab + bc + ac$. Докажите, что

$$a + b + c + 1 \geqslant 4abc.$$

Набросок решения: Зафиксируем p, из условия автоматически зафиксируется значение q. Перепишем неравенство через p, q, r: $p + 1 \geqslant 4r$. Заметим, что $p + 1 - 4r$ — это линейная функция от r с отрицательным коэффициентом при r, а значит она принимает минимальное значение когда r — максимально. Тогда нам достаточно доказать неравенство в случае, когда $a = b$, что мы без особого труда сделаем.

1. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что $1 + 9abc \geqslant 4(ab + bc + ca)$.

2. Известно, что $a, b, c > 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажите, что $(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geqslant 8$.

3. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$. Докажите, что

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ac} + \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geqslant 2.$$

4. Неотрицательные числа a, b и c таковы, что никакие два из них не равны 0 одновременно. Докажите неравенство

$$(ab + bc + ca)\left(\frac{1}{(a + b)^2} + \frac{1}{(b + c)^2} + \frac{1}{(c + a)^2}\right) \geqslant \frac{9}{4}.$$

5. Для неотрицательных a, b, c докажите неравенство

$$a^5 + b^5 + c^5 + abc(ab + bc + ca) \geqslant a^2b^2(a + b) + b^2c^2(b + c) + c^2a^2(c + a).$$

6. Числа $a, b, c \geqslant 1$ и $a + b + c = 9$. Докажите, что

$$\sqrt{ab + bc + ac} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

7. Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

2. Геометрия

Двойные отношения и гармонические четверки

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D на одной прямой называется величина

$$(A,B;C,D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

1. Пусть $(A,B;C,D) = x$. Найдите $(B,A;C,D), (C,D;A,B), (C,D;B,A)$.

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки прямых a, b, c, d, пересекающихся в одной точке, называется величина

$$(a,b;c,d) = \frac{sin\angle(\vec{a},\vec{c})}{sin\angle(\vec{b},\vec{c})} : \frac{sin\angle(\vec{a},\vec{d})}{sin\angle(\vec{b},\vec{d})},$$

где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ – это произвольные векторы, направленные вдоль прямых a, b, c, d соответственно, $\angle(\vec{a},\vec{b})$ – ориентированный угол с точностью до 2π.

Определение. Четыре прямые a, b, c, d пересекаются в точке O и пересекают прямые x и y в точках A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Преобразование (чего?), переводящее четверку точек A, B, C, D в четверку точек A_1, B_1, C_1, D_1 называется *центральным проектированием*, а точка O – *центром проектирования*.

2. Четыре различные прямые a, b, c, d пересекаются в точке O и пересекают прямые x и y в точках A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно.

(a) Докажите равенство $(A,B;C,D) = (a,b;c,d)$ (*Посчитайте площади двумя способами*), если среди точек A, B, C, D нет бесконечно удаленных точек (x не параллельна ни одной прямой из a, b, c, d)

(b) Докажите равенство $(A,B;C,D) = (a,b;c,d)$, для случая, если одна из точек прямой x – бесконечно удаленная. (x параллельна одной из прямых a, b, c, d)

(c) Докажите, что центральное проектирование сохраняет двойные отношения четверки точек, т.е. $(A,B;C,D) = (A_1,B_1;C_1,D_1)$.

Определение. Четверка точек такая, что $(A,B;C,D) = -1$, называется *гармонической*.

3. Докажите, что следующие четверки точек (либо прямых) гармонические:

(а) A, B, M, ∞, где точка M – середина отрезка AB;

(б) a, b, c, d, где прямые c и d – внутренняя и внешняя биссектрисы угла между прямыми a и b;

(в) B, C, A_1, A_2, где AA_1, BB_1, CC_1 — пересекающиеся в одной точке чевианы в треугольнике ABC, а A_2 — точка пересечения BC и B_1C_1;

(г) Центры двух окружностей и их центры отрицательной и положительной гомотетии составляют гармоническую четверку точек.

(д) Если через точку провести прямую, пересекающую окружность в двух точках, и взять ещё точку пересечения этой прямой с полярой исходной точки, то 4 такие точки образуют гармоническую четвёрку.

4. Прямые a и b пересекаются в точке P. На прямой a взяты точки A, B, C, на прямой b – точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что $(P, A; B, C) = (P, A_1; B_1 C_1)$ тогда и только тогда, когда прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

5. В четырехугольнике $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями точка O – точка пересечения диагоналей, P и Q – точки пересечения лучей AD и BC, BA и CD соответственно. Докажите, что $\angle POB = \angle QOB$.

6. Диагонали четырехугольника (не обязательно вписанного) $ABCD$ пересекаются в точке R, а продолжение боковых сторон в точках P и Q.

(а) Пусть T – основание перпендикуляра, опущенного из R на PQ. Докажите, что $\angle ATR = \angle CTR$ и $\angle BTR = \angle DTR$.

(б) Через точку R проведена прямая l, которая параллельна PQ. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой R пополам.

7. Дан угол с вершиной O и внутри него точка A. Рассмотрим такие точки M, N на разных сторонах данного угла, что углы MAO и OAN равны. Докажите, что все прямые MN проходят через одну точку (или параллельны).

8. Внутренняя и внешняя биссектрисы угла A неравнобедренного треугольника ABC пересекают прямую BC в точках K и L соответственно. Точка M — середина стороны AB. Прямая KM пересекает прямую AC в точке N. Докажите, что $NL = NA$.

9. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Пусть I и J — центры вписанных окружностей треугольников ALC и ALB. Прямая IJ пересекает прямые AB и AC в точках C' и B' соответственно. Докажите, что прямые AL, BB' и CC' пересекаются в одной точке.

10. Пусть H_B — основание высоты треугольника ABC, проведённой из вершины B; L_B основание соответствующей биссектрисы; K_B — точка касания вписанной окружности со стороной AC; T_B — точка касания вневписанной окружности со стороной AC. Точки H_A, L_A, K_A, T_A определяются аналогично. Докажите, что $H_BH_A, L_BL_A, K_BK_A, T_BT_A$ пересекаются в одной точке.

Двойные отношения и гармонические четверки, добавка

1. Дан остроугольный треугольник ABC, пусть H - его ортоцентр. Окружность проходит через точки B, C и пересекает окружность с диаметром AH в двух различных точках X, Y. Точка D - основание высоты из вершины A на сторону BC, а точка K - основание высоты из точки D на прямую XY. Докажите, что $\angle BKD = \angle CKD$.

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки Q, A, B, P лежат на одной прямой именно в таком порядке. Прямая AC касается окружности (ADQ), а прямая BD касается окружности (BCP). Точки M и N - середины BC и AD соответственно. Докажите, что следующие 3 прямые пересекаются в одной точке: прямая CD, касательная к окружности (ANQ) в точке A, касательная к окружности (BMP) в точке B.

3. Остроугольный треугольник $ABC(AB > AC)$ вписан в окружность Ω; точки M и N — середины меньшей и большей дуг BC окружности Ω соответственно. Из точки N опущен перпендикуляр NK на сторону AB. Докажите, что точки A, C, K и середина отрезка AM лежат на одной окружности.

Двойные отношения на окружности

Определение. *Двойным отношением* $(A, B; C, D)$ четвёрки различных точек A, B, C, D, лежащих на одной окружности, называют величину $(PA, PB; PC, PD)$, где P — произвольная точка той же окружности. Заметим, что эта величина не зависит от выбора точки P.

При этом точка P может совпадать с одной из точек A, B, C, D, и тогда соответствующая секущая вырождается в касательную к окружности.

1. **(а)** Из точки P, лежащей вне окружности, проведены касательные PM и PN (где M и N – точки касания), а также секущая, пересекающая окружность в точках A и B. Прямые MN и AB пересекаются в Q. Докажите, что $(P, Q; A, B) = -1$.

   (б) Докажите, что если двойное отношение четверки точек на окружности равно -1, то они образуют гармонический четырехугольник.

2. В угол BAC вписана окружность ω, касающаяся сторон угла в точках B, C. Хорда CD окружности ω параллельна прямой AB. Прямая AD второй пересекает окружность ω в точке E. Докажите, что прямая CE делит отрезок AB пополам.

3. **(а)** Дана точка P вне окружности, а на окружности отмечены различные точки A, B, C, D. Прямые AP, BP, CP, DP второй раз пересекают окружность в точках A', B', C', D' соответственно. Тогда $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$.

   (б) Докажите, что инверсия сохраняет двойные отношения на обобщенной прямой.

4. Четыре окружности $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ и ω_D касаются окружности ω в точках A, B, C, D соответственно и касаются друг друга по циклу. Все касания внешние. Докажите, что $ABCD$ — гармонический четырёхугольник.

5. (**Теорема о бабочке**) Хорды AC и BD окружности ω проходят через середину хорды MN. Отрезки AD и BC пересекают отрезок MN в точках X и Y. Докажите, что $XM = YN$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром O. Биссектриса угла ABD пересекает отрезок AD в точке K и окружность ω второй раз в точке M. Биссектриса угла CBD пересекает отрезок CD в точке L и окружность ω второй раз в точке N. Известно, что прямые KL и MN параллельны. Докажите, что описанная окружность треугольника MON проходит через середину отрезка BD.

7. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC вписан в окружность Ω; отрезки AM и AH – его медиана и высота соответственно. Прямая AH вторично пересекает окружность Ω в точке N. Окружность (MHN) пересекает окружность Ω в точках N и S. Докажите, что прямая AS направлена вдоль симедианы треугольника ABC.

Двойные отношения на окружности, добавка

1. Дан треугольник ABC и точка M; прямая, проходящая через M, пересекает AB, BC, CA в C_1, A_1, B_1 соответственно. Прямые AM, BM, CM пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника ABC.

2. На стороне BC неравнобедренного треугольника ABC выбираются всевозможные пары симметричных относительно середины отрезка BC точек X, Y. Прямые AX, AY вторично пересекают окружность (ABC) в точках P, Q. Докажите, что все прямые PQ проходят через фиксированную точку.

3. На окружности ω взяты точки A, B, C и D в указанном порядке. Пусть O — точка пересечения отрезков AC и BD, а ω_1 и ω_2 — окружности, описанные около треугольников AOB и COD соответственно. Прямая l проходит через точку O пересекает окружность ω в точках M и N, окружность ω_1 — в точке P и окружность ω_2 — в точке Q. Докажите, что $PM = NQ$.

4. Точки I – инцентр остроугольного треугольника ABC, вписанного в окружность с центром O. На нее меньших дугах BC, CA, AB отмечены точки A', B', C' так, что $A'I$, $B'I$, $C'I$ – биссектрисы углов $CA'B, AB'C, BC'A$ соответственно. Докажите, что AA', BB', CC' пересекаются в одной точке, лежащей на прямой OI.

5. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Обозначим его описанную окружность через Ω, а середину дуги CAB через S. Перпендикуляр из A на BC пересекает BS и Ω в точках D и $E \neq A$ соответственно. Прямая через D, которая параллельна BC, пересекает прямую BE в точке L. Обозначим описанную окружность треугольника BDL через ω. Пусть ω пересекает Ω второй раз в точке $P \neq B$. Докажите, что касательная к ω в точке P и прямая BS пересекаются на внутренней биссектрисе угла BAC.

Проективные преобразования и ко

Проективным преобразованием проективной плоскости Π назовем преобразование, которое можно представить в виде композиции центральных проекций $f_1, f_2, \dots, f_n$ в пространстве.
Проективные преобразования проективной плоскости можно определить как преобразования, переводящие прямые в прямые.

Проективное преобразование однозначно задаётся образами четырёх точек.

1. Докажите, что с помощью одной линейки невозможно разделить данный отрезок пополам. А с помощью двух?

2. Пусть O - точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, а E и F - точки пересечения пар сторон AB и CD, AD и BC соответственно. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках K и L, а прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках M и N. Докажите, что точка X пересечения прямых KN и LM лежит на прямой EF.

3. *(Вспоминаем поляры)* Пусть P - точка внутри окружности, а вписанный четырёхугольник $ABCD$ таков, что P - его точка пересечения диагоналей. Прямые AB и CD пересекаются в точке Q. Докажите, что все возможные точки Q лежат на одной прямой (поляре точки P)

4. *(Теорема Паппа)* Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой; точки A_2, B_2, C_2 лежат на другой прямой. Докажите, что точки пересечения пар прямых A_1B_2 и A_2B_1, B_1C_2 и B_2C_1, C_1A_2 и C_2A_1 лежат на одной прямой.

5. *(Теорема Дезарга)* Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 лежат на одной прямой (считайте, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ невырожденные).

6. *(Теорема Паскаля)* Дан выпуклый вписанный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что пересечения пар противоположных сторон этого шестиугольника лежат на одной прямой.

7. **(а)** На листе бумаги нарисованы точка A и две прямые, пересекающиеся в точке B вне листа. При помощи одной линейки нарисуйте на листе прямую AB. **(б)** На листе бумаги отмечены точки A и B, а вот от линейки отрезали концы так, что её длина короче AB. Справьтесь провести прямую AB не смотря на все преграды.

8. Докажите, что любой выпуклый пятиугольник проективно эквивалентен пятиугольнику, образованному точками пересечения его диагоналей.

9. Медиана BM_b пересекает γ в точках P и Q. Точки P' и Q' на γ выбраны таким образом, что $PP' \parallel QQ' \parallel AC$. Прямые BP' и BQ' пересекают AC в точках X и Y. Докажите, что отрезки AX и CY равны.

Линейное движение точек и прямых

Определение. Объект движется линейно, если существует такой вектор $\vec{v}$, что за время t объект параллельно переносится на вектор $t \cdot \vec{v}$.

1. Докажите или опровергните:

(а) Середина отрезка, соединяющего две линейно движущиеся точки, движется линейно. **(б)** Прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку, движется линейно. **(в)** Прямая, проведённая через две линейно движущиеся точки, движется линейно. **(г)** Точка пересечения линейно движущихся прямых движется линейно.

2. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB, AC в точках C_1, B_1 соответственно. На отрезках BC_1, AB_1 отмечены точки P и Q соответственно так, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1.

3. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно так, что отрезки BP и AQ равны. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника CPQ лежит на прямой AC.

4. Прямая, перпендикулярная стороне BC треугольника ABC, пересекает его высоты BH и CH в точках P и Q соответственно, а сторону BC - в точке M. Докажите, что ортоцентр треугольника HPQ лежит на прямой AM.

5. На стороне AC треугольника ABC с центром описанной окружности O выбрана точка M, а на сторонах AB и BC - точки K и N так, что точка K равноудалена от точек A и M, а точка N равноудалена от точек M и C. **(а)** Докажите, что четырёхугольник $NBKO$ вписанный **(б)** Пусть H — ортоцентр треугольника MNK. Докажите, что $HO \parallel AC$.

6. **Теорема.** Если три линейно движущиеся точки лежат на одной прямой в три различных момента времени, то они всегда лежат на одной прямой.

7. Пусть H - ортоцентр треугольника ABC. Пусть точка P движется по описанной окружности треугольника ABH, а A_1 и B_1 - пересечения прямых AP и BP со сторонами BC и AC треугольника ABC. Найдите ГМТ середин отрезков A_1B_1.

8. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Общие внешние касательные к окружностям (ABC) и (CDA) пересекаются в точке P, а общие внешние касательные к окружностям (BCD) и (DAB) пересекаются в точке Q. Докажите, что точки P, Q и E лежат на одной прямой.

9. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Прямая XY пересекает окружность (ABC) в точках P и Q. Докажите, что середины отрезков BY, CX, XY и PQ лежат на одной окружности.

Линейное движение, добавка

1. В треугольнике точки M, N изогонально сопряжены. На прямых BM, CM, BN, CN выбраны точки P, Q, R, S соответственно так, что $PQ \parallel QS \parallel MN$. Докажите, что точки A, P, Q, M лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда точки A, R, S, N лежат на одной окружности.

2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ и произвольная точка X. Пусть X_{AB}, X_{BC}, X_{CD}, X_{DA}, X_{AC}, X_{BD} - проекции точки X на прямые AB, BC, CD, DA, AC и BD соответственно. Докажите, что середины отрезков $X_{AB}X_{CD}$, $X_{BC}X_{DA}$ и $X_{AC}X_{BD}$ лежат на одной прямой.

3. В треугольнике ABC на радиусах вписанной окружности, проведённых из её центра I к сторонам AB, BC и AC отметили точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что отрезки IC_1, IB_1 и IA_1 попарно равны. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке K. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок $A'K$ пересекает окружность (APQ) в точке S. Докажите, что окружность (BSC) касается окружности (APQ).

Проективное движение

1. На продолжении стороны CD за точку D прямоугольника $ABCD$ отмечена точка P; точки M и N — середины сторон AD, BC соответственно. Прямые PM и AC пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая NM — биссектриса угла PNQ.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD. На его сторонах AB и AC вовне построены подобные прямоугольные треугольники ABU и ACV $(\angle ABU = \angle ACV = 90°, \angle BAU = \angle CAV)$. Докажите, что прямые BV и CU пересекаются на прямой AD.

3. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P. Точки A_1 и C_1 — середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A_1 на CP, пересекается с перпендикуляром, опущенным из C_1 на AP, в точке K. Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C.

Если в конструкции очередного изучаемого отображения много окружностей, то инверсия поможет вам убедиться в сохранении двойных отношений.

4. Остроугольный равнобедренный треугольник $ABC(AB = AC)$ вписан в окружность Ω. На меньшей дуге BC отмечена произвольная точка X. Касательная к Ω в точке X пересекает касательные к Ω из точек B и C в точках P и Q соответственно. Докажите, что длина отрезка, высекаемого прямыми AP и AQ на прямой BC, не зависит от выбора точки X.

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отмечена середина M стороны BC и основание H высоты AH. Внутри треугольника нашлись такие точки P и Q, то $\angle BAP = \angle CAQ$ и $\angle BPA = \angle CQA = 90°$. Докажите, что точки M, H, P, Q лежат на одной окружности.

6. AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Окружность ω_A касается стороны BC в точке A_1 и "меньшей" дуги BC описанной окружности треугольника ABC в точке A_2. Аналогично определены точки B_2 и C_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2.

7. Пусть $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$— вневписанные окружности треугольника ABC, касающиеся сторон BC, CA и AB соответственно. Обозначим через l_a общую внешнюю касательную окружностей γ_b и γ_c, отличную от BC. Аналогично определим прямые l_b, l_c. Из точки P, лежащей на l_a, проведем отличную от l_a касательную к γ_b и найдем точку X ее пересечения с l_c. Аналогично найдем точку Y пересечения касательной из P к γ_c с l_b. Докажите, что прямая XY касается γ_a.

8. 2025 прямых пересекаются в одной точке. В каждый из 4050-и углов вписано по окружности; окружности касаются друг друга по циклу. На сторонах углов отмечено по точке. Известно, что для всех углов, кроме одного, отрезок, соединяющий отмеченные точки на сторонах, касается вписанной в угол окружности. Докажите, что для оставшегося угла это также верно.

3. Комбинаторика

Теория Рамсея

Упражнение. На олимпиаду пришли 6 человек. Докажите, что либо найдётся три человека, которые попарно друг друга знают, либо три человека, которые попарно друг друга не знают.

Определение. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_\ell$ — натуральные числа. *Числом Рамсея* $R(n_1, n_2, \dots, n_\ell)$ называется такое наименьшее натуральное число, что всякая раскраска рёбер графа с $R(n_1, n_2, \dots, n_\ell)$ вершинами в ℓ цветов для какого-то i содержит полный подграф цвета i размера n_i.

1. **(а)** Докажите, что $R(3,4) \leqslant 10$.

   (б) Докажите, что $R(3,4) \leqslant 9$.

2. Докажите, что

   (а) $R(m,n) \leqslant R(m-1,n) + R(m,n-1)$;

   (б) $R(m,n) \leqslant \binom{n+m-2}{n-1}$.

3. Пусть всякие два человека могут либо дружить, либо враждовать либо быть незнакомыми. Докажите, что среди 17 человек всегда найдутся трое попарно дружащих, или трое попарно враждующих, или трое попарно незнакомых.

Замечание. Таким образом, $R(3,3,3) \leqslant 17$. На самом деле $R(3,3,3) = 17$.

4. Для всех $l \geqslant 2$ докажите неравенство

$$R(n_1, n_2, \dots, n_\ell) \leqslant \binom{n_1 + n_2 + \dots + n_\ell - \ell}{n_1 - 1,\ n_2 - 1,\ \dots,\ n_\ell - 1}.$$

5. В некотором множестве выбрали бесконечное количество конечных подмножеств одинакового размера. Докажите, что можно выбрать 2022 из них так, чтобы любые два различных пересекались по одному и тому же количеству элементов.

6. **Теорема Шура.** Натуральные числа раскрашены в k цветов. Докажите, что найдётся одноцветное решение уравнения $x + y = z$.

7. **(а)** Даны $m+1$ ненулевых вычетов по простому модулю p. Докажите, что отношение каких-то двух — точная m-я степень некоторого вычета.

   (б) Докажите, что для любого натурального m при достаточно больших простых p существует нетривиальное решение уравнения

$$x^m + y^m \equiv z^m \mod p.$$

8. Все трёхэлементные подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$ раскрашены в два цвета. Докажите, что при всех достаточно больших n найдётся такое подмножество $\{x_1, \dots, x_{100}\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, в котором все тройки $\{x_i, x_j, x_k\}$ одноцветные.

9. **Теорема Эрдеша–Секереша.** Докажите, что при всех достаточно больших n среди любых n точек плоскости в общем положении можно выделить вершины некоторого выпуклого 100-угольника.

Теория Рамсея. Добавка

1. В классе учится $2n$ школьников, по n девочек и мальчиков. На досуге каждая пара из мальчика и девочки любит обсуждать либо футбол, либо волейбол. Докажите, что при достаточно большом n найдутся 10 мальчиков и 10 девочек, среди которых все пары на досуге обсуждают один и тот же вид спорта.

Определение. Пусть H_1, H_2 — два данных графа. *Число Рамсея* $R(H_1, H_2)$ — это наименьшее натуральное n, для которого при любой раскраске рёбер полного графа на n вершинах в два цвета обязательно найдётся подграф, изоморфный H_1, с рёбрами цвета 1 или подграф, изоморфный H_2, с рёбрами цвета 2.

2. Даны натуральные числа $k, m > 1$ и некоторое дерево T_m на m вершинах. Найдите $R(T_m, K_k)$.

3. Рассмотрим n-мерный куб $m \times m \times \ldots \times m$. Назовём *линией* такую последовательность $X_1, \ldots, X_m$ клеток куба, что у этих клеток в каждой координате значения либо одинаковые, либо равны $1, 2, \ldots, m$ именно в таком порядке.

Hales-Jewett theorem. Даны натуральные числа k, m. Тогда есть такое натуральное число $n = n(k, m)$, что при любой раскраске клеток n-мерного куба $\mathcal{M}^n = m \times m \times \ldots \times m$ в k цветов найдётся линия из m клеток, раскрашенная в один цвет.

Докажем теорему Хайлса-Джеветта индукцией по m. Индукционное предположение ИП(m) звучит так: пусть утверждение теоремы справедливо для данного m и любого числа цветов k.

(а) Докажите, что если выполнено ИП(m), то найдутся такие натуральные числа n и N, что при любой раскраске куба $\mathcal{M}^{n+N}$ можно выделить такие линии $X_1, \ldots, X_m \in \mathcal{M}^n$ и $Y_1, \ldots, Y_m \in \mathcal{M}^N$, что все клетки (X_i, Y_j) — одноцветные.

(б) Докажите, что если выполнено ИП(m), то теорема верна для куба со стороной $m + 1$ и двух цветов.

(в) Докажите, что если выполнено ИП(m), то теорема верна для куба со стороной $m + 1$ и любого наперёд заданного числа цветов.

4. Выведите из теоремы Хейлса-Джеветта теорему Ван дер Вардена: для любой раскраски натурального ряда в конечное число цветов в нём можно найти сколько угодно длинную одноцветную арифметическую прогрессию.

Теорема Турана

Определение. Подмножество вершин графа G называется *независимым*, если любые две его вершины не соединены ребром.

Определение. *Независимым числом* графа называется размер его максимального независимого множества.

Теорема 1. В графе G на n вершинах независимое число не превосходит α. Тогда число рёбер графа G не меньше, чем число рёбер графа на n вершинах, состоящего из α почти равных клик.

Теорема 2. В графе G на n вершинах нет клик размера k. Тогда число рёбер графа G не превосходит числа рёбер полного $(k-1)$-дольного графа на n вершинах с почти равными долями.

1. **(а)** Обозначим через $T(n, \alpha)$ минимальное количество рёбер в графе, число независимости которого не превосходит α. Докажите неравенство
$$T(n, \alpha) \geqslant (n-\alpha) + T(n-\alpha, \alpha).$$
(б) Докажите теорему Турана.

2. Каждое ребро некоторого графа на 60 вершинах покрашено в красный или синий цвет так, что нет одноцветного треугольника. Какое наибольшее количество рёбер может быть в таком графе?

3. В стране 210 городов и совсем нет дорог. Король хочет построить несколько дорог с односторонним движением так, чтобы для любых трёх городов A, B, C, между которыми есть дороги, ведущие из A в B и из B в C, не было бы дороги, ведущей из A в C. Какое наибольшее число дорог он сможет построить?

4. За круглым столом сидят n человек. Разрешается поменять местами любых двух людей, сидящих рядом. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате каждые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?

5. На плоскости дано множество S из $3n$ точек диаметра 1. Каково максимально возможное количество пар точек, расстояние между которыми строго больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

6. **(а)** Есть $2n+1$ батарейка ($n > 2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?
(б) Та же задача, но батареек $2n$ ($n > 2$), причём хороших и плохих поровну.

7. На плоскости отмечено $4n$ точек. Соединим отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1. Известно, что среди любых $n+1$ точек обязательно найдутся две, соединённые отрезком. Докажите, что проведено хотя бы $7n$ отрезков.

8. Каково наибольшее возможное количество полных подграфов размера k в графе на n вершинах, не содержащем полного подграфа на $k+1$ вершине?

Непрерывность в КГ

Функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in [a,b]$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такая $\delta > 0$, что для каждого $x \in [a,b]$ выполнено $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Теорема. Непрерывная функция f на отрезке $[a,b]$ принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

1. Докажите или опровергните: для любого **(а)** выпуклого; **(б)** не обязательно выпуклого многоугольника и любого направления существует прямая данного направления, делящая периметр пополам.

2. Дан (не обязательно выпуклый) многоугольник и точка P, лежащая **(а)** вне; **(б)** внутри выпуклой оболочки его вершин. Докажите, что существует прямая через точку P, делящая площадь пополам. Единственна ли такая прямая?

3. Докажите, что для любого выпуклого многоугольника существует прямая, делящая пополам и площадь, и периметр.

4. На плоскости отмечены две системы точек: $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$. Выяснилось, что для любой точки P плоскости

$$|PA_1| + |PA_2| + \ldots + |PA_n| \neq |PB_1| + |PB_2| + \ldots + |PB_n|.$$

Докажите, что центры масс систем $\{A_1, \ldots, A_n\}$, $\{B_1, \ldots, B_n\}$ совпадают.

5. На плоскости даны два (не обязательно выпуклых) многоугольника. Докажите, что есть прямая, делящая площадь каждого из них пополам. *Бутерброд из хлеба и колбасы можно разрезать на две равные по хлебу и колбасе части.*

6. Пабло нарисовал на плоскости квадрат, на каждой стороне (или продолжении стороны) отметил по точке, а затем стёр квадрат. Оказалось, что никакие два из шести отрезков, соединяющих эти четыре точки, не перпендикулярны. Казимир хочет восстановить квадрат Пабло. Какое наименьшее число способов это сделать может быть?

7. Докажите, что через любой выпуклый многоугольник можно провести две перпендикулярные прямые, делящие его на 4 равные по площади части.

8. У Эванжелисты есть «делилка на троих» для блинов. Она представляет собой три луча из одной точки под углами 120° друг к другу. Делилку можно параллельно переносить вдоль любых векторов плоскости, но нельзя поворачивать. Докажите, что любой выпуклый многоугольный блин можно разделить делилкой на три равные по площади части.

Непрерывность в КГ. Добавка

1. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике найдутся две равные непересекающиеся хорды, делящие его площадь на три равные части.

2. Внутри выпуклого многоугольника A лежит выпуклый многоугольник B, их контуры не пересекаются. Назовём хорду многоугольника A *опорной*, если она пересекает многоугольник B только по точкам контура (по вершине или по стороне). Докажите, что найдутся две опорные хорды, середины которых принадлежат контуру многоугольника B.

3. (**Теорема Борсука-Улама**) Для любой пары непрерывных вещественнозначных функций f и g на сфере найдётся пара диаметрально противоположных точек, в которых функция f принимает одинаковые значения и функция g принимает одинаковые значения.
(а) Выведите из теоремы Борсука-Улама теорему о бутерброде: бутерброд в $\mathbb{R}^3$ из хлеба, колбасы и сыра можно разрезать плоскостью на две равные и по объёму хлеба, и по объёму колбасы, и по объёму сыра части (здесь хлеб, сыр, колбаса — ограниченные тела).
(б) Докажите теорему Борсука-Улама.
Почему-то вспомнилось следующее доказательство обычной теоремы о промежуточном значении для непрерывной функции f на отрезке $[a, b]$.
(1) Покрасим точки отрезка $[a, b]$ в два цвета: где $f(x)$ меньше промежуточного значения и где больше.
(2) Для любого конечного разбиения отрезка на отрезочки есть отрезочек с разноцветными концами.
(3) Подойдёт любая предельная точка последоватености разноцветных отрезочков всё более мелких разбиений.

4. Докажите, что в контур любого выпуклого многоугольника можно вписать прямоугольник.

Непрерывная комбинаторика

1. В домике Копатыча припасены 15 бочонков мёда различных объёмов. Докажите, что Копатыч может разлить один бочонок на два новых так, чтобы полученные 16 бочонков можно было разбить на две группы по 8 с равным суммарным объёмом мёда.

2. Дан набор из 99 положительных чисел с суммой S. Докажите, что есть не менее 2^{49} способов выбрать 50 из них с суммой строго больше $S/2$.

3. В 99 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов.

4. Группа в детском саду насчитывает 30 детей. Дети встали в ряд так, что возрасты любых двух соседних детей различаются не более чем на 1 год.
(а) Докажите, что воспитатель может построить детей парами в ряд так, чтобы в любых двух соседних в ряду парах суммарный возраст отличался не более чем на 1 год.
(б) Докажите, что воспитатель может построить детей тройками в ряд так, чтобы в любых двух соседних в ряду тройках суммарный возраст отличался не более чем на 1 год.
(в) На городской ёлке 30 детей взялись за руки в хоровод так, что возрасты любых двух соседей различаются не более чем на 1 год. Докажите, что можно разбить детей на пары и расставить пары по кругу так, чтобы суммарный возраст в каждых двух соседних парах различался бы не более чем на 1 год.

5. На продуктовом складе валяются 20 кусков сыра разных сортов. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков так, чтобы сыр можно было разложить на две кучки, равные по весу и по цене.

6. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

7. На нескольких карточках записаны вещественные числа (по одному на каждой). Игра с дилером проходит так: каждый ход дилер вскрывает одну карточку из колоды, а игрок должен положить карточку в одну из стопок либо создать новую стопку. При этом в любой момент времени числа на карточках из одной стопки должны различаться не болеее чем на 1. Игра заканчивается, когда заканчиваются карты у дилера. Петя сыграл в игру с дилером один раз, создав в процессе игры 10 стопок. Докажите, что Вася при игре с дилером на той же колоде гарантированно сможет создать не более 19 стопок.

8. В 100 ящиках лежат яблоки, апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется не менее половины всех яблок, не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.

Вариация и катастрофы

1. На отрезке AB отмечено $2n$ различных точек, симметричных относительно середины AB. При этом n из них покрашены в красный цвет, оставшиеся n — в синий. Докажите, что сумма расстояний от точки A до красных точек равна сумме расстояний от точки B до синих точек.

2. Внутри выпуклого 100-угольника отмечена точка X, не лежащая ни на какой диагонали. Докажите, что количество треугольников с вершинами в вершинах исходного 100-угольника, содержащих точку X, чётно.

3. На окружности выписаны несколько вещественных чисел из отрезка $[0, 1]$. Докажите, что окружность можно разбить на 2024 дуги так, чтобы суммы чисел на соседних дугах отличались не более чем на 1 (сумму чисел на дуге без чисел считаем равной 0).

4. Можно ли нарисовать на плоскости полный граф K_{101} так, чтобы его вершины были в точках общего положения, рёбра — отрезками, и чтобы в точности 4 000 000 пар его рёбер пересекались (по внутренним точкам)?

5. На прямой отмечены $2n$ различных точек, при этом n из них покрашены в красный цвет, остальные n — в синий. Докажите, что сумма попарных расстояний между точками одного цвета не превосходит суммы попарных расстояний между точками разного цвета.

6. На плоскости проведены $n \geqslant 3$ прямых общего положения. Прямые раскрашены в красный и синий цвет, оба цвета присутствуют. Докажите, что среди частей, на которые делям плоскость прямые, найдётся треугольник, у которого не все стороны одного цвета.

7. *Хромой ладьёй* назовём ладью, которая за один ход может сдвинуться только на одну клетку. Хромая ладья за 64 хода обошла все клетки шахматной доски и вернулась на исходную клетку. Докажите, что число её ходов по горизонтали не равно числу ходов по вертикали.

8. На плоскости нарисованы n различных окружностей, никакие три окружности не пересекаются в одной точке. Улитка Турбо начинает ползти вдоль какой-то окружности против часовой стрелки. Как только она попадает в точку пересечения двух окружностей, она меняет окружность и продолжает ползти против часовой стрелки уже по следующей окружности. В какой-то момент оказалость, что Турбо целиком проползла все окружности. Докажите, что n нечётно.