Разнобой

1. Два четырехугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ симметричны друг другу относительно точки P. Известно, что четырехугольники A_1BCD, AB_1CD и ABC_1D вписанные. Докажите, что $ABCD_1$ тоже вписанный.

2. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC, отличные от прямой AC. Они касаются этой окружности в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой.

3. В равнобедренном треугольнике $ABC(AB = AC)$ выбрана точка P такая, что $PB > PC$ и $\angle PBA = \angle PCB$. Точка M — середина стороны BC, точка O — центр окружности (APM). Докажите, что $\angle OAC = 2\angle BPM$.

4. Внутри остроугольного треугольника ABC отмечена точка P. Обозначим через P_A, P_B, P_C проекции точки P на стороны BC, CA, AB. Прямые BC и P_BP_C пересекаются в точке S. Окружность $(P_AP_BP_C)$ второй раз пересекает прямую BC в точке T. Докажите, что $SP \perp AT$.

5. В описанном пятиугольнике $ABCDE$ $AB = BC, CD = DE$. Отрезки AD и BE пересекаются в точке P, отрезок BD пересекает CA и CE в точках Q и T соответственно. Докажите, что треугольник PQT равнобедренный.

6. Из точки A к окружности ω проведена касательная AD и произвольная секущая, пересекающая окружность в точках B и C (B лежит между точками A и C). Докажите, что окружность, проходящая через точки C и D и касающаяся прямой BD, проходит через фиксированную точку (отличную от D).

7. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N. Пусть прямая AB касается ω_1 и ω_2 в точках A и B соответственно, при этом M лежит ближе к AB чем N. Прямая CD параллельна AB и проходит через точку M, где C лежит на ω_1 и D лежит на ω_2. Прямые AC и BD пересекаются в точке E; прямые AN и CD пересекаются в точке P; прямые BN и CD пересекаются в точке Q. Докажите, что $EP = EQ$.

8. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ оказалось, что $BC \parallel AE, AB = BC+AE$, и $\angle ABC = \angle CDE$. Пусть M - середина стороны CE, а точка O - центр описанной окружности треугольника BCD. Оказалось, что $\angle DMO = 90°$, докажите, что $2\angle BDA = \angle CDE$.