

Разнобой по комбинаторике

1. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, которые не пересекаются вне городов. В каждом городе установлена табличка, на которой указана минимальная длина маршрута, выходящего из этого города и проходящего по всем остальным городам страны (маршрут может проходить по некоторым городам больше одного раза и не обязан возвращаться в исходный город). Докажите, что любые два числа на табличках отличаются не более, чем в полтора раза.
2. Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 64 одинаковых квадрата и раскрасил их в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратов. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка – белого или чёрного?
3. В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые 2 соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые 2 фишки, между которыми стоят ровно 4 фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке?
4. Барон Мюнхгаузен вернулся из отпуска. «Удивительная страна. Стоимости перелётов между всеми парами городов разные, но у всех циклических маршрутов, проходящим по всем городам, суммарная стоимость перелётов одинаковая». Известно, что городов не менее 2025 и что любые два из них соединены двусторонней авиалинией. Могли ли слова барона оказаться правдой?
5. В одном из углов шахматной доски лежит плоский картонный квадрат 2×2 , а в противоположном – квадрат 1×1 . Двое играющих по очереди перекатывают каждый свой квадрат через сторону: Боря – большой квадрат, а Миша – маленький. Первым ходит Миша. Боря выигрывает, если не позднее 100-го хода Мишин квадрат окажется на клетке, накрытой Бориным квадратом. Может ли Боря выиграть, как бы ни играл Миша?
6. В некотором графе степень каждой вершины не превосходит 1000. Докажите, что рёбра графа можно так покрасить в 10 цветов, что не найдется нечётного одноцветного цикла.
7. Лёша и Артём играют в игру «Морской бой-2000». На доске 1×2000 они по очереди ставят на свободные клетки доски букву «S» или «O», начинает Лёша. Выигрывает тот, кто первым получает слово «SOS». Каков результат игры при правильной игре?