Теорема Шпернера

Теорема Шпернера. В n-элементном множестве выбрано несколько подмножеств так, что ни одно из них не содержится ни в каком другом. Тогда этих подмножеств не более $C_n^{\lfloor n/2\rfloor}$.

1. **(а)** Рассмотрим всевозможные цепочки подмножеств

$$\varnothing = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

В скольких из них содержится фиксированное s-элементное множество?

(б) Даны подмножества n-элементного множества $A_1, A_2, \ldots, A_k$, ни одно из которых не содержится в другом. Докажите неравенство *Любеля-Мешалкина-Ямамото*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{C_n^{|A_i|}} \leqslant 1$$

и выведите из него теорему Шпернера.

2. Докажите, что все 2^n подмножеств n-элементного множества можно разбить на $C_n^{\lfloor n/2\rfloor}$ групп так, что в каждой группе среди любых двух подмножеств одно вложено в другое. Выведите теорему Шпернера.

3. Детектив расследует преступление. В деле замешаны 100 человек, среди которых один — преступник, а один — свидетель. Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 100 человек, и если среди приглашённых есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. За какое наименьшее число дней детектив заведомо сможет получить показания свидетеля?

4. Пусть среди отмеченных подмножеств n-элементного множества нет k попарно вложенных подмножеств. Какое наибольшее количество подмножеств может быть отмечено?

5. На математической олимпиаде Средиземья было предложено 10 задач. Оказалось, что любые два гнома решили разные наборы задач, причем обязательно нашлась задача, решенная первым из них и не решенная вторым, и задача, решенная вторым из них и не решенная первым. Какое наибольшее количество верных решений могло прочитать жюри олимпиады?

6. В множестве из n элементов отметили несколько подмножеств так, что никакое отмеченное подмножество не содержится ни в одном другом отмеченном, причем любые два отмеченные подмножества пересекаются и никакие два подмножества не дают в объединении все множество. Какое наибольшее количество подмножеств может быть отмечено, если **(а)** n — четное; **(б)** n —нечетное?