

Тренировочная олимпиада

1. Сумма трёх положительных чисел равна их произведению. Докажите, что среди этих чисел хотя бы два не меньше одного.
2. На прямой сидят 2024 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.
3. На доске написано число, большее некоторого натурального числа на $1/2$. Каждую минуту, если на доске записано число x , оно заменяется на число $x \cdot ([x] + 2024)$. Могло ли так случиться, что на доске впервые появится целое число ровно через 2024 минуты?
4. Каждая сторона равностороннего треугольника разделена на 6 равных частей, через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам, делящие исходный треугольник на 36 маленьких треугольничков. В каждой из вершин этих треугольничков сидит по жуку. Они одновременно начинают двигаться по линиям деления с равными скоростями. Когда жук попадает в вершину треугольничка, он поворачивает на 60° или 120° градусов (жук может поворачивать как по, так и против часовой стрелки). Докажите, что через некоторое время какие-то два жука окажутся в одной вершине маленького треугольничка.
5. На прямой, содержащей сторону AC неравностороннего треугольника ABC , отмечена точка D так, что прямая BD касается окружности (ABC) . Прямая, проходящая через D , пересекает отрезки AB и BC в точках K и L соответственно. Точки N и M выбраны на прямой AC таким образом, что $AB \parallel LN$, $BC \parallel KM$, а прямые KM и LN , чтобы вам было проще, пересекаются в точке P внутри треугольника ABC . Прямая BP повторно пересекает окружность NMP в точке Q . Докажите, что прямая QD касается окружности NMP .