Частный случай теоремы Кези

Теорема Кези, частный случай. Предположим, что на плоскости даны окружность ω и три точки A, B, C вне неё, не лежащие на одной прямой. Обозначим длины отрезков касательных из точек A, B, C к окружности ω через t_a, t_b, t_c соответственно. Тогда окружность (ABC) касается окружности ω в том и в только в том случае, если для некоторой расстановки знаков + и − выполнено соотношение

$$\pm t_a BC \pm t_b CA \pm t_c AB = 0.$$

1. **Обобщение теоремы Помпею.** Окружность ω касается меньшей дуги BC описанной окружности равностороннего треугольника ABC внешним образом. Обозначим длины отрезков касательных из точек A, B, C к окружности ω через t_a, t_b, t_c соответственно. Докажите, что $t_a = t_b + t_c$.

2. **Теорема Фейербаха.** Докажите, что в неравнобедренном треугольнике ABC окружность девяти точек касается **(а)** вписанной окружности; **(б)** трёх вневписанных окружностей.

Точка касания вписанной окружности треугольника с окружностью девяти точек называется *точкой Фейербаха*.

3. Докажите, что в неравнобедренном треугольнике расстояние от точки Фейербаха до середины одной из сторон равно сумме расстояний от точки Фейербаха до середин двух других.

4. В прямоугольном треугольнике $ABC (\angle ACB = 90°)$ проведена высота CD. Окружность ω касается отрезков AD и AC в точках M и N соответственно и касается окружности (BDC) внешне. Докажите, что $BM = BC$.

5. Точка X на стороне AB треугольника ABC такова, что $AX = AI$, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Окружность ω, вписанная в угол BAC, содержит точку X. Окружность Ω проходит через точки B и C и касается ω внутренним образом. Докажите, что центр Ω лежит на (ABC).

6. Точка D лежит на основании BC равнобедренного треугольника ABC, а точки M и K — на его боковых сторонах AB и AC соответственно так, что $AMDK$ — параллелограмм. Прямые MK и BC пересекаются в точке L. Перпендикуляр к BC, проходящий через D, пересекает прямые AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что окружность с центром L, проходящая через D, касается описанной окружности треугольника AXY.

7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямые DE и DF в точках X и Y соответственно. Точки S и T отмечены на стороне BC так, что $\angle XSY = \angle XTY = 90°$. Докажите, что окружность (AST) касается **(а)** описанной окружности треугольника ABC **(б)** вписанной окружности треугольника ABC.

8. Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность с центром в точке O. Касательные к окружности в точках A и C вместе с прямой BD образуют треугольник δ. Докажите, что окружность (BOD) касается описанной окружности треугольника δ.