Теорема Турана

Определение. Подмножество вершин графа G называется *независимым*, если любые две его вершины не соединены ребром.

Определение. *Независимым числом* графа называется размер его максимального независимого множества.

Теорема 1. В графе G на n вершинах независимое число не превосходит α. Тогда число рёбер графа G не меньше, чем число рёбер графа на n вершинах, состоящего из α почти равных клик.

Теорема 2. В графе G на n вершинах нет клик размера k. Тогда число рёбер графа G не превосходит числа рёбер полного $(k-1)$-дольного графа на n вершинах с почти равными долями.

1. **(а)** Обозначим через $T(n,\alpha)$ минимальное количество рёбер в графе, число независимости которого не превосходит α. Докажите неравенство

$$T(n,\alpha) \geqslant (n-\alpha) + T(n-\alpha,\alpha).$$

(б) Докажите теорему Турана.

2. В стране 210 городов и совсем нет дорог. Король хочет построить несколько дорог с односторонним движением так, чтобы для любых трёх городов A, B, C, между которыми есть дороги, ведущие из A в B и из B в C, не было бы дороги, ведущей из A в C. Какое наибольшее число дорог он сможет построить?

3. Каждое ребро некоторого графа на 60 вершинах покрашено в красный или синий цвет так, что нет одноцветного треугольника. Какое наибольшее количество рёбер может быть в таком графе?

4. За круглым столом сидят n человек. Разрешается поменять местами любых двух людей, сидящих рядом. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате каждые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?

5. На плоскости дано множество S из $3n$ точек диаметра 1. Каково максимально возможное количество пар точек, расстояние между которыми строго больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

6. **(а)** Есть $2n+1$ батарейка ($n > 2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?
(б) Та же задача, но батареек $2n$ ($n > 2$), причём хороших и плохих поровну.

7. На плоскости отмечено $4n$ точек. Соединим отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1. Известно, что среди любых $n+1$ точек обязательно найдутся две, соединённые отрезком. Докажите, что проведено хотя бы $7n$ отрезков.