Двойные отношения и гармонические четверки

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D на одной прямой называется величина
$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

1. Пусть $(A, B; C, D) = x$. Найдите $(B, A; C, D), (C, D; A, B), (C, D; B, A)$.

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки прямых a, b, c, d, пересекающихся в одной точке, называется величина
$$(a, b; c, d) = \frac{sin\angle(\vec{a}, \vec{c})}{sin\angle(\vec{b}, \vec{c})} : \frac{sin\angle(\vec{a}, \vec{d})}{sin\angle(\vec{b}, \vec{d})},$$
где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ – это произвольные векторы, направленные вдоль прямых a, b, c, d соответственно, $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ – ориентированный угол с точностью до 2π.

Определение. Четыре прямые a, b, c, d пересекаются в точке O и пересекают прямые x и y в точках A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Преобразование (чего?), переводящее четверку точек A, B, C, D в четверку точек A_1, B_1, C_1, D_1 называется *центральным проектированием*, а точка O – *центром проектирования*.

2. Четыре различные прямые a, b, c, d пересекаются в точке O и пересекают прямые x и y в точках A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно.

   (a) Докажите равенство $(A, B; C, D) = (a, b; c, d)$ (*Посчитайте площади двумя способами*), если среди точек A, B, C, D нет бесконечно удаленных точек (x не параллельна ни одной прямой из a, b, c, d)

   (b) Докажите равенство $(A, B; C, D) = (a, b; c, d)$, для случая, если одна из точек прямой x – бесконечно удаленная. (x параллельна одной из прямых a, b, c, d)

   (c) Докажите, что центральное проектирование сохраняет двойные отношения четверки точек, т.е. $(A, B; C, D) = (A_1, B_1; C_1, D_1)$.

Определение. Четверка точек такая, что $(A, B; C, D) = -1$, называется *гармонической*.

3. Докажите, что следующие четверки точек (либо прямых) гармонические:

   (а) A, B, M, ∞, где точка M – середина отрезка AB;

   (б) a, b, c, d, где прямые c и d – внутренняя и внешняя биссектрисы угла между прямыми a и b;

   (в) B, C, A_1, A_2, где AA_1, BB_1, CC_1 — пересекающиеся в одной точке чевианы в треугольнике ABC, а A_2 — точка пересечения BC и B_1C_1;

   (г) Центры двух окружностей и их центры отрицательной и положительной гомотетии составляют гармоническую четверку точек.

   (д) Если через точку провести прямую, пересекающую окружность в двух точках, и взять ещё точку пересечения этой прямой с полярой исходной точки, то 4 такие точки образуют гармоническую четвёрку.

4. Прямые a и b пересекаются в точке P. На прямой a взяты точки A, B, C, на прямой b – точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что $(P, A; B, C) = (P, A_1; B_1 C_1)$ тогда и только тогда, когда прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

5. В четырехугольнике $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями точка O – точка пересечения диагоналей, P и Q – точки пересечения лучей AD и BC, BA и CD соответственно. Докажите, что $\angle POB = \angle QOB$.

6. Диагонали четырехугольника (не обязательно вписанного) $ABCD$ пересекаются в точке R, а продолжение боковых сторон в точках P и Q.

   (а) Пусть T – основание перпендикуляра, опущенного из R на PQ. Докажите, что $\angle ATR = \angle CTR$ и $\angle BTR = \angle DTR$.

   (б) Через точку R проведена прямая l, которая параллельна PQ. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой R пополам.

7. Дан угол с вершиной O и внутри него точка A. Рассмотрим такие точки M, N на разных сторонах данного угла, что углы MAO и OAN равны. Докажите, что все прямые MN проходят через одну точку (или параллельны).

8. Внутренняя и внешняя биссектрисы угла A неравнобедренного треугольника ABC пересекают прямую BC в точках K и L соответственно. Точка M — середина стороны AB. Прямая KM пересекает прямую AC в точке N. Докажите, что $NL = NA$.

9. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Пусть I и J — центры вписанных окружностей треугольников ALC и ALB. Прямая IJ пересекает прямые AB и AC в точках C' и B' соответственно. Докажите, что прямые AL, BB' и CC' пересекаются в одной точке.

10. Пусть H_B — основание высоты треугольника ABC, проведённой из вершины B; L_B основание соответствующей биссектрисы; K_B — точка касания вписанной окружности со стороной AC; T_B — точка касания вневписанной окружности со стороной AC. Точки H_A, L_A, K_A, T_A определяются аналогично. Докажите, что $H_BH_A, L_BL_A, K_BK_A, T_BT_A$ пересекаются в одной точке.