Разнобой по прошлым темам

1. В треугольнике ABC точки P и Q отмечены внутри треугольника так, что $\angle ABP = \angle QBC$ и $\angle ACP = \angle QCB$. Точка D лежит на стороне BC. Докажите, что $\angle APB + \angle DPC = 180°$ тогда и только тогда, когда $\angle AQC + \angle DQB = 180°$.
2. В треугольнике ABC отмечена точка D на стороне BC. Окружность (ABD) пересекает сторону AC повторно в точке E. Окружность (ACD) пересекает AB повторно в точке F. Пусть A' - это отражение A относительно прямой BC. прямые $A'C$ и DE пересекаются в точке P, а прямые $A'B$ и DF пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые AD, BP и CQ пересекаются в одной точке или параллельны.
3. Пусть $ABCDE$ - это выпуклый пятиугольник, в котором $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ и $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$. Диагонали BD и CE пересекаются в точке P. Докажите, что прямая AP делит CD пополам.
4. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Окружность (ABC) пересекается с окружностью (A_1CB_1) в точках C и P. Касательные к (ABC) в точках A и B пересекаются в точке Z. Докажите, что прямые AP, ZC_1 и CB пересекаются в одной точке.
5. Полувписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q и касается окружности (ABC) внутренним образом в точке T. Отрезки AT и PQ пересекаются в точке S. Докажите, что $\angle ABS = \angle ACS$.
6. Внутри окружности Ω отмечена точка K. Рассматриваются все хорды AB окружности Ω такие, что $\angle AKB = 90°$. Докажите, что проекции точки K на всевозможные хорды AB лежат на одной окружности.
7. Диагонали описанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке S. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ASB, BSC, CSD и DSA лежат на одной окружности.
8. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF и отмечен центр описанной окружности O. Окружности (ABC) и (ADO) пересекаются в точке $P \neq A$. Окружность (ABC) пересекает прямую PE в точке $X \neq P$ и прямую PF в точке $Y \neq P$. Докажите, что $XY \parallel BC$.

[ЦПМ, кружок по математике] А. Филатов
[*2024-2025*] группа 10-геом *29 октября*

Разнобой по прошлым темам

1. В треугольнике ABC точки P и Q отмечены внутри треугольника так, что $\angle ABP = \angle QBC$ и $\angle ACP = \angle QCB$. Точка D лежит на стороне BC. Докажите, что $\angle APB + \angle DPC = 180°$ тогда и только тогда, когда $\angle AQC + \angle DQB = 180°$.
2. В треугольнике ABC отмечена точка D на стороне BC. Окружность (ABD) пересекает сторону AC повторно в точке E. Окружность (ACD) пересекает AB повторно в точке F. Пусть A' - это отражение A относительно прямой BC. прямые $A'C$ и DE пересекаются в точке P, а прямые $A'B$ и DF пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые AD, BP и CQ пересекаются в одной точке или параллельны.
3. Пусть $ABCDE$ - это выпуклый пятиугольник, в котором $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ и $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$. Диагонали BD и CE пересекаются в точке P. Докажите, что прямая AP делит CD пополам.
4. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Окружность (ABC) пересекается с окружностью (A_1CB_1) в точках C и P. Касательные к (ABC) в точках A и B пересекаются в точке Z. Докажите, что прямые AP, ZC_1 и CB пересекаются в одной точке.
5. Полувписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q и касается окружности (ABC) внутренним образом в точке T. Отрезки AT и PQ пересекаются в точке S. Докажите, что $\angle ABS = \angle ACS$.
6. Внутри окружности Ω отмечена точка K. Рассматриваются все хорды AB окружности Ω такие, что $\angle AKB = 90°$. Докажите, что проекции точки K на всевозможные хорды AB лежат на одной окружности.
7. Диагонали описанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке S. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ASB, BSC, CSD и DSA лежат на одной окружности.
8. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF и отмечен центр описанной окружности O. Окружности (ABC) и (ADO) пересекаются в точке $P \neq A$. Окружность (ABC) пересекает прямую PE в точке $X \neq P$ и прямую PF в точке $Y \neq P$. Докажите, что $XY \parallel BC$.