

Непрерывность в геометрии

Определение. Функция непрерывна, если при малых изменениях значения аргумента мало изменяется и значение функции.

Более строгая формулировка: $f(x)$ непрерывна в каждой точке x некоторого множества тогда и только тогда, когда для приращений функции в этих точках выполняется равенство $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$.

Теорема о промежуточном значении. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_1, x_2]$ и $f(x_1) = a, f(x_2) = b$, то для любого c между a и b найдется $x_0 \in [x_1, x_2]$, что $f(x_0) = c$.

1. Докажите, что в окружности с центром O можно провести хорду AB так, что площадь треугольника AOB равна площади сегмента, отсекаемого этой хордой.
2. Докажите, что любую выпуклую ограниченную плоскую фигуру можно разбить на две равновеликие фигуры:
 - (а) прямой, параллельной заданной
 - (б) прямой, проходящей через заданную точку.
3. Можно ли в окружность радиуса 1 вписать треугольник периметра 5?
4. У двух равнобедренных треугольников соответственно равны боковые стороны и радиусы вписанных окружностей. Обязательно ли эти треугольники равны?
5. (а) Докажите, что любой треугольник можно разбить на два треугольника так, чтобы окружности, вписанные в получившиеся треугольники, были равны.
(б) Останется ли утверждение верным, если вписанные окружности заменить на описанные?
6. Периметр выпуклого четырехугольника равен 2024, одна из его диагоналей равна 1011. Может ли вторая диагональ быть равна:
 - (а) 1011
 - (б) 2
7. Через точку пересечения диагоналей четырехугольника D проведена произвольная прямая, пересекающая стороны AD и BC в точках K и M соответственно. Докажите, что длина отрезка MK не превосходит наибольшей из диагоналей четырехугольника.
8. Дан шарнирный четырехугольник (длины его сторон и их порядок зафиксированы, а углы могут меняться). Докажите, что существует такое положение этого четырехугольника, при котором он вписан в окружность.