Раскраски графов

1. Докажите, что связный граф, в котором степени всех вершин не превосходят d, можно покрасить в $d > 2$ цветов правильным образом, если
   (а) в графе есть вершина, степень которой меньше d.
   (б) в графе есть вершина, удаление которой нарушает связность графа.
   (в) в графе есть пара соседних вершин, удаление которых нарушает связность графа.
   (г) в графе есть пара вершин, удаление которых нарушает связность графа.
   (д) в графе есть пара несмежных вершин, смежных с какой-то третьей, при этом удаление вершин не нарушает связности графа.
   (е) **(Теорема Брукса)** В связном графе степени всех вершин не превосходят $d > 1$, при этом граф не является полным графом и не является нечётным циклом. Докажите, что его вершины можно раскрасить в d цветов, чтобы одноцветные вершины не были соединены ребром.

2. Дан связный граф на 1000 вершинах, степени всех вершин которого не превосходят 10. Докажите, что на его рёбрах можно расставить стрелки, чтобы каждый простой путь содержал не более 9 рёбер.

3. Докажите, что вершины графа, в котором степень каждой вершины не более k, можно раскрасить в $k^2 - k + 1$ цвет так, чтобы ни у какой вершины не было двух одноцветных соседей.

4. Вершины графа нельзя раскрасить правильным образом в d цветов. Докажите, что можно выбрать несколько вершин в этом графе, чтобы каждая из выбранных была соединена хотя бы с d из выбранных.

5. Дан связный граф. Известно, что как ни покрась его вершины в n цветов, найдется ребро с концами одного цвета. Докажите, что можно так удалить $\frac{n(n-1)}{2}$ рёбер, чтобы граф остался связным.