Отношение степеней и пучки окружностей

1. (**Лемма для первой половины**) Окружность ω лежит внутри окружности Ω и касается ее в точке T. На окружности Ω выбраны точки A и B. Для каждой точки X плоскости обозначим длину отрезка касательной из X к ω через $\delta(X, \omega)$. Докажите, что $AT/BT = \delta(A, \omega)/\delta(B, \omega)$.

2. Хорды AC и BD окружности Ω пересекаются в точке K. Окружность ω касается отрезков AK и DK в точках P и Q и касается окружности Ω внутренним образом в точке T. Прямая PQ пересекает отрезок AB в точке X. Докажите, что прямая TX – биссектриса угла ATB.

3. Окружность Ω проходит через вершины B и C неравнобедренного треугольника ABC и содержит внутри себя вершину A. Окружность ω касается отрезков AB и AC в точках P и Q и касается окружности Ω внутренним образом в точке T. Прямые BC и PQ пересекаются в точке X. Докажите, что прямая TX проходит через середину дуги BC окружности Ω.

4. Вписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC с центром в точке I касается стороны BC в точке K. Некоторая окружность касается прямой BC в точке K и касается окружности (ABC) в точке T, причем точки A и T лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC. Докажите, что $\angle ATI = 90°$.

5. **(a)** Окружность задана уравнением $f(x, y) = x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ в декартовых координатах. Выразите через f значение степени точки с координатами (x, y) относительно этой окружности. **(b)** Даны две окружности. Докажите, что локусом точек плоскости с постоянными отношением степеней относительно этих окружностей служит окружность, прямая, точка или пустое множество.

   Пучком окружностей называется семейство окружностей, заданных уравнениями $\lambda \cdot f(x, y) + \mu \cdot g(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ и $g(x, y)$ - фиксированные многочлены вида $x^2 + y^2 + Ax + Bx + C$, а λ и μ пробегают всевозможные вещественные значения.

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает окружности в точках C и D. Докажите, что середины отрезков CD лежат на одной окружности.

7. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X, Y, Z выбраны на продолжениях отрезков AB, AA_1, AC соответственно так, что $BC_1 = BX, 3A_1H = A_1Y, CB_1 = CZ$. Докажите, что точки A, X, Y, Z лежат на одной окружности.

8. Секущая пересекает первую окружность в точках A_1, B_1, а вторую – в точках A_2, B_2. Вторая секущая пересекает первую окружность в точках C_1, D_1, а вторую – в точках C_2, D_2. Докажите что точки $A_1C_1 \cap B_2D_2, A_1C_1 \cap A_2C_2, A_2C_2 \cap B_1D_1, B_2D_2 \cap B_1D_1$ лежат на одной окружности, соосной с данными двумя.

9. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω. Окружность ω касается прямых AB и CD в точках X и Y и пересекает дугу AD окружности Ω в точках P и Q. Прямая XY пересекает AC и BD в точках U и V. Докажите, что точки P, Q, U, V лежат на одной окружности, касающейся прямых AC и BD.

[ЦПМ, кружок по математике] А. Филатов
[*2024-2025*] группа 10-геом *22 октября*

Отношение степеней и пучки окружностей

1. (**Лемма для первой половины**) Окружность ω лежит внутри окружности Ω и касается ее в точке T. На окружности Ω выбраны точки A и B. Для каждой точки X плоскости обозначим длину отрезка касательной из X к ω через $\delta(X, \omega)$. Докажите, что $AT/BT = \delta(A, \omega)/\delta(B, \omega)$.

2. Хорды AC и BD окружности Ω пересекаются в точке K. Окружность ω касается отрезков AK и DK в точках P и Q и касается окружности Ω внутренним образом в точке T. Прямая PQ пересекает отрезок AB в точке X. Докажите, что прямая TX – биссектриса угла ATB.

3. Окружность Ω проходит через вершины B и C неравнобедренного треугольника ABC и содержит внутри себя вершину A. Окружность ω касается отрезков AB и AC в точках P и Q и касается окружности Ω внутренним образом в точке T. Прямые BC и PQ пересекаются в точке X. Докажите, что прямая TX проходит через середину дуги BC окружности Ω.

4. Вписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC с центром в точке I касается стороны BC в точке K. Некоторая окружность касается прямой BC в точке K и касается окружности (ABC) в точке T, причем точки A и T лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC. Докажите, что $\angle ATI = 90°$.

5. **(a)** Окружность задана уравнением $f(x, y) = x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ в декартовых координатах. Выразите через f значение степени точки с координатами (x, y) относительно этой окружности. **(b)** Даны две окружности. Докажите, что локусом точек плоскости с постоянными отношением степеней относительно этих окружностей служит окружность, прямая, точка или пустое множество.

   Пучком окружностей называется семейство окружностей, заданных уравнениями $\lambda \cdot f(x, y) + \mu \cdot g(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ и $g(x, y)$ - фиксированные многочлены вида $x^2 + y^2 + Ax + Bx + C$, а λ и μ пробегают всевозможные вещественные значения.

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает окружности в точках C и D. Докажите, что середины отрезков CD лежат на одной окружности.

7. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X, Y, Z выбраны на продолжениях отрезков AB, AA_1, AC соответственно так, что $BC_1 = BX, 3A_1H = A_1Y, CB_1 = CZ$. Докажите, что точки A, X, Y, Z лежат на одной окружности.

8. Секущая пересекает первую окружность в точках A_1, B_1, а вторую – в точках A_2, B_2. Вторая секущая пересекает первую окружность в точках C_1, D_1, а вторую – в точках C_2, D_2. Докажите что точки $A_1C_1 \cap B_2D_2, A_1C_1 \cap A_2C_2, A_2C_2 \cap B_1D_1, B_2D_2 \cap B_1D_1$ лежат на одной окружности, соосной с данными двумя.

9. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω. Окружность ω касается прямых AB и CD в точках X и Y и пересекает дугу AD окружности Ω в точках P и Q. Прямая XY пересекает AC и BD в точках U и V. Докажите, что точки P, Q, U, V лежат на одной окружности, касающейся прямых AC и BD.