Отборочная олимпиада

1. Все коэффициенты многочлена $P(x)$ равны либо 0, либо 1, причём $P(1) = 25$. Может ли число 11 встретиться среди коэффициентов многочлена $P^2(x)$ хотя бы 16 раз?

2. В каждой клетке квадрата 2024×2024 написали положительное число. В пяти клетках таблицы сидит по лягушке, которые мешают увидеть числа под ними. Андрей посчитал сумму всех чисел, которые он видит, и получил 2024. Затем все лягушки одновременно перепрыгнули на соседнюю по стороне клетку (все лягушки по прежнему в разных клетках), и число Андрея теперь стало равно 2024^2. Потом лягушки снова прыгнули, а число изменилось на 2024^3, и так далее: после каждого прыжка число Андрея увеличивалось в 2024 раз. Какое наибольшее число мог получить Андрей?

3. В стране 100 городов, попарно соединенных дорогами, на каждой из которых введена положительная плата за проезд. Власти закрыли k дорог на ремонт, и в результате какие два города ни возьми, самый дешевый маршрут между ними либо вырос в цене, либо отсутствует вовсе. При каком наименьшем k такое могло произойти?

4. Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине B пересекаются в точке I. Перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую IC, пересекает прямую IA в точке D, а перпендикуляр, опущенный из B на прямую IA, пересекает IC в точке E. Докажите, что центр описанной окружности треугольника IDE лежит на прямой AC.

5. Барон Мюнхгаузен утверждает, что раскрасил все натуральные числа в три цвета, причём у любого натурального числа количества делителей двух любых цветов отличаются не более чем на 2. Могут ли его слова оказаться правдой?