# Линейный функции

Числовая функция $f$ на плоскости называется *линейной*, если выполнено одно из двух эквивалентных условий:

- Для любых точек $A, B, C$ и вещественных $\lambda$ и $\mu$ таких, что $\mu + \lambda \neq 0$ и точка $C$ делит отрезок $AB$ в отношении $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\mu}{\lambda}$, верно равенство
$$f(C) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} f(A) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} f(B).$$
- Существуют вещественных числа $a, b, c$ такие, что для любой точки $A$ с координатами $(x, y)$ верно
$$f(A) = ax + by + c.$$

Основные примеры линейных функций:

- $f(X) \equiv const$.
- $f(X)$ - ориентированное расстояние от точки $X$ до фиксированной прямой $l$.
- $f(X)$ - ориентированная площадь треугольника $XBC$, где $B$ и $C$ - фиксированные точки.
- $f(X)$ - разность степеней точки $X$ относительно двух фиксированных окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$.

**1.** **(a)** Докажите, что множеством нулей линейной функции служит прямая, плоскость либо пустое множество.

**(b)** Докажите, что линейная комбинация линейных функций вновь линейная функция.

**2.** Построив соответствующую линейную функцию, докажите, что основания трёх внешних биссектрис неравнобедренного треугольника лежат на одной прямой.

**3.** **(a)** В треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $AA_1$ и $CC_1$. На отрезке $A_1C_1$ взята произвольная точка $P$. Докажите, что сумма расстояний от $P$ до $AB$ и $BC$ равна расстоянию до $AC$.

**(b)** Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $P$, лучи $AD$ и $BC$ в точке $Q$. Биссектрисы углов $BAD$ и $BCD$ пересекаются в точке $X$, биссектрисы углов $ABC$ и $ADC$ в точке $Y$; наконец, внешние биссектрисы углов $APC$ и $AQC$ пересекаются в точке $Z$. Докажите, что точки $X, Y, Z$ лежат на одной прямой.

**4.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $BB_1$ и $CC_1$. С центром в точке $B$ построена окружность $\omega_B$ радиуса $\frac{1}{2}BB_1$; с центром в точке $C$ построена окружность $\omega_C$ радиуса $\frac{1}{2}CC_1$. Прямая $l$ - общая внешняя касательная к окружностям $\omega_B$ и $\omega_C$, не пересекающая треугольник $ABC$. Докажите, что инцентр треугольника, образованного прямыми $AB, AC$ и $l$, лежит на отрезке $BC$.

**5.** **(a)** (*Прямая Гаусса*) Продолжения сторон $AB$ и $CD$ выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $E$, продолжения сторон $BC$ и $AD$ в точке $F$. Построив соответствующую линейную функцию, докажите, что середины отрезков $AC, BD, EF$ лежат на одной прямой.

**(b)** (*Теорема Ньютона*) Использовав построенную линейную функцию, докажите, что в описанном четырехугольнике центр вписанной окружности лежит на прямой Гаусса этого четырехугольника.

**6.** Прямая $l$ делит площадь и периметр треугольника $ABC$ пополам. Докажите, что $l$ проходит через центр вписанной окружности треугольника $ABC$.

**7.** Даны две окружности $\omega_A$ и $\omega_B$, лежащие вне друг друга. Рассматриваются всевозможные пары точек $A$ и $B$ такие, что $A \in \omega_A, B \in \omega_B$ и длины отрезков касательных из $A$ к $\omega_B$ и из $B$ к $\omega_A$ равны. Найдите локус (т.е. геометрическое место) середин всевозможных отрезков $AB$.

**8.** Внешние биссектрисы $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ с наименьшей стороной $BC$ пересекаются в точке $I_A$. На отрезках $BC_1, CB_1$ взяли точки $X$ и $Y$ соответственно так, что отрезок $XY$ проходит через $I_A$. Докажите, что отражения прямых $CX$ и $BY$ относительно осей $CI_A$ и $BI_A$ соответственно пересекаются на прямой $B_1C_1$.

**9.** Из точки на вписанной окружности треугольника провели касательные к трем вневписанным окружностям. Докажите, что из этих отрезков можно составить прямоугольный треугольник тогда и только тогда, когда она лежит на одной из средних линий треугольника.

**10.** Вписанная окружность в треугольник $ABC$ касается его сторон $BC, AC$ и $AB$ в точках $A_1, B_1$ и $C_1$. Прямая $B_1C_1$ пересекает описанную окружность $ABC$ в точках $P$ и $Q$. Окружность описанную около $PA_1Q$ обозначим через $\omega_a$. Аналогично определяются $\omega_b, \omega_c$. Докажите, что радикальный центр $\omega_a, \omega_b$ и $\omega_c$ — ортоцентр $A_1B_1C_1$.

**11.** Пусть $O$ и $H$ центр описанной окружности и ортоцентр остроугольного неравнобедренного треугольника $ABC$ соответственно. Срединный перпендикуляр к отрезку $AH$ пересекает стороны $AB$ и $AC$ в точках $X_A$ и $Y_A$ соответственно. Пусть $K_A$ - это точка пересечения описанных окружностей треугольников $OX_AY_A$ и $BOC$, отличная от $O$. Аналогично определим точки $K_B$ и $K_C$. Докажите, что $K_A$, $K_B$, $K_C$ и $O$ лежат на одной окружности.