# Лемма об изогоналях

**Лемма.** Пусть $OA_1, OA_2$ и $OB_1, OB_2$ – пары изогоналей внутри некоторого угла с вершиной $O$. $X$ — пересечение $A_1B_1$ и $A_2B_2$, Y — пересечение $A_1B_2$ и $A_2B_1$. Тогда $OX$ и $OY$ изогональны внутри того же угла.

1. В треугольнике $ABC$. Чевианы $AA_1, BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке. Оказалось, что $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$. Докажите, что $AA_1$ — высота треугольника $ABC$.
2. На сторонах $AB$ и $AC$ остроугольного треугольника $ABC$ вне его построены квадраты $ABFE$ и $ACGT$. Докажите, что точка $P$ пересечения прямых $CF$ и $BG$ лежит на высоте $AA_1$ треугольника $ABC$.
3. Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $P$, а ее диагонали — в точке $Q$. На меньшем основании $BC$ отмечена точка $M$ так, что $AM = MD$. Докажите, что $\angle PMB = \angle QMB$.
4. Вершины $B$ и $C$ треугольника $ABC$ спроецировали на биссектрису внешнего угла $A$, получили точки $B_1$ и $C_1$ соответственно. Докажите, что прямые $BC_1$ и $CB_1$ пересекаются на внутренней биссектрисе угла $A$.
5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки $I$ и $K$ — центры вписанных окружностей треугольников $ABC$ и $ACD$ соответственно, а $J$ и $L$ — центры их вневписанных окружностей касающихся сторон $BC$ и $CD$ соответственно. Докажите, что прямые $IL$ и $JK$ пересекаются на биссектрисе угла $BCD$.
6. На стороне $AB$ треугольника $ABC$ взята произвольная точка $C_1$. Точки $A_1, B_1$ на лучах $BC$ и $AC$ таковы, что $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = 30°$. Прямые $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются в точке $C_2$. Доказать, что все прямые $C_1C_2$ проходят через одну фиксированную точку.
7. На прямой, содержащей высоту треугольника $ABC$, проведённую к стороне $BC$, выбрали точку $X$. Точка $D$ — середина дуги $BC$ описанной окружности остроугольного треугольника $ABC$, не содержащая точку $A$. Прямая, проходящая через центр окружности, параллельно $AD$ пересекает прямую $XD$ в точке $N$. Точка $M$ — середина отрезка $XD$. Докажите, что $\angle XAM = \angle NAO$.
8. Внутри треугольника $ABC$ отмечены точки $X, Y, Z$ такие, что $\angle CBX = \angle ZBA$, $\angle BAZ = \angle YAC$, $\angle ACY = \angle XCB$. Докажите, что прямые $AX, BY$ и $CZ$ пересекаются в одной точке.
9. Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $BC$, $CA$ и $AB$ в точках $D$, $E$ и $F$ соответственно. Точка $K$ является проекцией точки $D$ на прямую $EF$. Точка $H$ — ортоцентр треугольник $ABC$, точка $A'$ диаметрально противоположна $A$ в описанной окружности треугольника $ABC$. Докажите, что $DK$ — биссектриса угла $HKA'$.
10. В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AD, BE, CF$ и отмечен центр описанной окружности $O$. Описанные окружности треугольников $ABC$ и $ADO$ пересекаются в точках $P$ и $A$. Окружность $ABC$ пересекает прямую $PE$ повторно в точке $X$, а прямую $PF$ повторно в точке $Y$. Докажите, что $XY \parallel BC$.

**[ЦПМ, кружок по математике]** А. Филатов
[*2024-2025*] группа 10-геом *15 октября*

# Лемма об изогоналях

**Лемма.** Пусть $OA_1, OA_2$ и $OB_1, OB_2$ – пары изогоналей внутри некоторого угла с вершиной $O$. $X$ — пересечение $A_1B_1$ и $A_2B_2$, Y — пересечение $A_1B_2$ и $A_2B_1$. Тогда $OX$ и $OY$ изогональны внутри того же угла.

1. В треугольнике $ABC$. Чевианы $AA_1, BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке. Оказалось, что $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$. Докажите, что $AA_1$ — высота треугольника $ABC$.
2. На сторонах $AB$ и $AC$ остроугольного треугольника $ABC$ вне его построены квадраты $ABFE$ и $ACGT$. Докажите, что точка $P$ пересечения прямых $CF$ и $BG$ лежит на высоте $AA_1$ треугольника $ABC$.
3. Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $P$, а ее диагонали — в точке $Q$. На меньшем основании $BC$ отмечена точка $M$ так, что $AM = MD$. Докажите, что $\angle PMB = \angle QMB$.
4. Вершины $B$ и $C$ треугольника $ABC$ спроецировали на биссектрису внешнего угла $A$, получили точки $B_1$ и $C_1$ соответственно. Докажите, что прямые $BC_1$ и $CB_1$ пересекаются на внутренней биссектрисе угла $A$.
5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки $I$ и $K$ — центры вписанных окружностей треугольников $ABC$ и $ACD$ соответственно, а $J$ и $L$ — центры их вневписанных окружностей касающихся сторон $BC$ и $CD$ соответственно. Докажите, что прямые $IL$ и $JK$ пересекаются на биссектрисе угла $BCD$.
6. На стороне $AB$ треугольника $ABC$ взята произвольная точка $C_1$. Точки $A_1, B_1$ на лучах $BC$ и $AC$ таковы, что $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = 30°$. Прямые $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются в точке $C_2$. Доказать, что все прямые $C_1C_2$ проходят через одну фиксированную точку.
7. На прямой, содержащей высоту треугольника $ABC$, проведённую к стороне $BC$, выбрали точку $X$. Точка $D$ — середина дуги $BC$ описанной окружности остроугольного треугольника $ABC$, не содержащая точку $A$. Прямая, проходящая через центр окружности, параллельно $AD$ пересекает прямую $XD$ в точке $N$. Точка $M$ — середина отрезка $XD$. Докажите, что $\angle XAM = \angle NAO$.
8. Внутри треугольника $ABC$ отмечены точки $X, Y, Z$ такие, что $\angle CBX = \angle ZBA$, $\angle BAZ = \angle YAC$, $\angle ACY = \angle XCB$. Докажите, что прямые $AX, BY$ и $CZ$ пересекаются в одной точке.
9. Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $BC$, $CA$ и $AB$ в точках $D$, $E$ и $F$ соответственно. Точка $K$ является проекцией точки $D$ на прямую $EF$. Точка $H$ — ортоцентр треугольник $ABC$, точка $A'$ диаметрально противоположна $A$ в описанной окружности треугольника $ABC$. Докажите, что $DK$ — биссектриса угла $HKA'$.
10. В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AD, BE, CF$ и отмечен центр описанной окружности $O$. Описанные окружности треугольников $ABC$ и $ADO$ пересекаются в точках $P$ и $A$. Окружность $ABC$ пересекает прямую $PE$ повторно в точке $X$, а прямую $PF$ повторно в точке $Y$. Докажите, что $XY \parallel BC$.