Отрезки касательных и 4-ломаные

Определение. *4-ломаной* $(AC|BD)$ назовем четверку отрезков AB, BC, CD, DA такую, что точки A, B, C, D различны и не лежат на одной прямой. Назовем 4-ломаную $(AC|BD)$

- *вырожденной*, если какие-то три из точек A, B, C, D лежат на одной прямой.
- *центральной*, если $ABCD$ — параллелограмм.

Определение. Назовем невырожденную 4-ломаную $(AC|BD)$ описанной, если существует окружность ω, которой касаются прямые AB, BC, CD и DA. Окружность ω будем называть вписанной в 4-ломаную.

В случае вырожденной 4-ломаной $(AC|BD)$ (пусть, скажем, A, B и C лежат на одной прямой), потребуем дополнительно, чтобы касание прямой AB с ω происходило в точке B.

Определение. Окружность ω вписана в 4-ломаную $(AC|BD)$

- *внутренним образом*, если ее центр лежит на пересечении внутренних биссектрис углов $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle DAB$.
- *(AC)-внешним образом*, если ее центр лежит на пересечении внутренних биссектрис углов $\angle ABC$, $\angle CDA$ и внешних биссектрис углов $\angle BCD$, $\angle DAB$.
- *(BD)-внешним образом*, если ее центр лежит на пересечении внешних биссектрис углов $\angle ABC$, $\angle CDA$ и внутренних биссектрис углов $\angle BCD$, $\angle DAB$.

Теорема. 4-ломаная $(AC|BD)$ является описанной

- *внутренним образом* тогда и только тогда, когда
  $AB + CD = BC + AD$
- *(AC)-внешним образом* тогда и только тогда, когда она не центральная и
  $AB + DA = BC + CD$
- *(BD)-внешним образом* тогда и только тогда, когда она не центральная и
  $AB + BC = CD + DA$

Теорема транзитивности. Пусть даны 4-ломаные $(AB|XY)$, $(AB|YZ)$ и $(AB|ZX)$. Тогда

- если для двух из них существуют окружности, вписанные внутренним образом, то и для третьей — тоже.
- если для $(AB|XY)$ и $(AB|YZ)$ существуют окружности, вписанные соответственно (XY)-внешним и (YZ)-внешним образом, и 4-ломаная $(AB|ZX)$ не центральная, то для нее существует окружность, вписанная (ZX)-внешним образом.
- если для $(AB|XY)$ и $(AB|YZ)$ существуют окружности, вписанные (AB)-внешним образом, то для $(AB|ZX)$ существует окружность, вписанная внутренним образом.

1. Две прямые, проходящие через точки пересечения пар противоположных сторон выпуклого четырехугольника, делят его на четыре меньших четырехугольника. Докажите, что если два меньших четырехугольника, не имеющих общей стороны, описанные, то и исходный четырехугольник описанный.

2. Внутри треугольника ABC выбрана точка S. Прямые AS, BS, CS пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что если из четырехугольников AC_1SB_1, BA_1SC_1, CA_1SB_1 два являются описанными, то третий также является описанным.

3. На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка X. Общая внешняя касательная к вписанным окружностям треугольников ABX и ACX, отличная от BC, пересекает отрезок AX в точке Y. Докажите, что длина отрезка AY не зависит от выбора точки X.

4. Внутри описанного четырехугольника $ABCD$ расположены окружности ω_a и ω_c, вписанные в углы BAD и BCD. Известно, что B лежит на одной из общих внутренних касательных к окружностям ω_a и ω_c. Докажите, что D также лежит на общей внутренней касательной к ω_a и ω_c.

5. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. На отрезках AI и IC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MBN = \frac{1}{2}\angle ABC$. Докажите, что $\angle MDN = \frac{1}{2}\angle ADC$.

6. Окружность с центром I касается сторон BC, AC и AB неравнобедренного треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. В четырёхугольники AC_1IB_1 и CA_1IB_1 вписаны окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что общая внутренняя касательная к ω_1 и ω_2, отличная от IB_1, проходит через точку B.

7. Фиксированы две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2, одна их внешняя касательная l и одна их внутренняя касательная m. На прямой m выбирается точка X, а на прямой l строятся точки Y и Z так, что прямые XY и XZ касаются ω_1 и ω_2 соответственно, а треугольник XYZ содержит окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что центры окружностей, вписанных во всевозможные треугольники XYZ, лежат на одной прямой.