Разнобой по ТЧ

1. Михаил хочет расположить все натуральные числа от 1 до 2024 по кругу так, чтобы каждое число использовалось ровно один раз и для любых трех последовательных чисел a, b, c число $a + c$ было кратно $b + 1$. Сможет ли он это сделать?

2. Пусть p — нечетное простое число, а a, b, c — целые числа такие, что числа $a^{2023} + b^{2023}, b^{2024} + c^{2024}, a^{2025} + c^{2025}$ делятся на p. Докажите, что a, b, c делятся на p.

3. **(а)** Докажите, что уравнение $(x^2 - 2)(x^2 - 3)(x^2 - 6) = 0$ имеет решение по любому модулю p, но не имеет решений в целых числах.
(б) Докажите, что многочлен $x^4 + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$, но приводим по любому простому модулю p.

4. Дано натуральное число c и последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ такая, что $p_i + c$ делится на p_{i+1}. Докажите, что последовательность $\{p_n\}$ ограничена.

5. При каких целых k верно утверждение: число $(a^3 + b^3 + c^3 - kabc)$ делится на $a + b + c$ при любых целых a, b, c, сумма которых не равна 0?

6. Найдите все пары натуральных a и b, для которых a^b делит $b^a - 1$.

7. Конечное множество натуральных чисел S таково, что для каждого элемента x в S и каждого его делителя d имеется ровно один элемент y в S, для которого $(x, y) = d$. Сколько элементов может быть в S (найдите все возможности)?

8. Существует ли такая бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из натуральных чисел, что произведение $a_n \cdot \ldots \cdot a_{n+9}$ делится на сумму $a_n + \ldots + a_{n+9}$ при любом натуральном n?

9. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что для любого простого $p < n$ выполнено сравнение $p^n \equiv (p-1)^n + 1 \pmod{n^2}$.