Точка Микеля вписанного четырехугольника

1. Дан четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность с центром в точке O. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи AD и BC — в точке Q, диагонали AC и BD — в точке R. Пусть M — точка Микеля четвёрки прямых AB, BC, CD, DA. Докажите перечисленные ниже утверждения.

(a) Точки M, P, Q лежат на одной прямой.

(b) Точки B, O, D, M лежат на одной окружности (как и точки A, O, C, M).

(c) Точки M и R инверсны относительно окружности $(ABCD)$.

(d) Точка M — проекция точки O на прямую PQ.

2. Окружность с центром O проходит через вершины B и C неравнобедренного треугольника ABC и пересекает стороны AB, AC второй раз в точках P и Q. Окружности (ABC) и (APQ) пересекаются в точках A и M. Докажите, что $\angle OMA = 90°$.

3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке R. Окружности (ABR) и (CDR) пересекаются в точках R и X, окружности (BCR) и (DAR) пересекаются в точках R и Y. Докажите, что длина отрезка XY не превосходит расстояния от R до центра окружности $(ABCD)$.

4. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а AC и BD пересекаются в точке P. Прямые EP и AD пересекаются в точке K, а M - это середина AD. Докажите, что $BCMK$ вписан.

5. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, а стороны AB и CD в точке F. Точка K отмечена так, что $ABKC$ параллелограмм. Докажите, что $\angle AFE = \angle CDK$.

6. Дан равнобедренный треугольник ABC, M — середина основания BC. Точка P такова, что $PA \parallel BC$. Точки X и Y выбраны на продолжении отрезков PB и PC за точки B и C соответственно так, что $\angle PXM = \angle PYM$. Докажите, что $APXY$ вписанный.

7. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AC < BC$. Окружность проходит через точки A и B и пересекает отрезки CA и CB повторно в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и A_1B_1C пересекаются повторно в точке P. Отрезки AB_1 и BA_1 пересекаются в точке S. Точки Q и R симметричны S относительно прямых CA и CB. Докажите, что точки P, Q, R и C лежат на одной окружности.

8. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AC < BC$. Окружность с центром в проходит через точки A и B и пересекает отрезки CA и CB повторно в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и A_1B_1C пересекаются повторно в точке P. Докажите, что треугольники PAB_1 и PA_1B имеют общий центр вписанной окружности.

9. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в O. Обозначим $AD \cap BC = E$ и $AC \cap BD = F$. Окружность ω касается прямых AC и BD. PQ - диаметр окружности ω такой, что F - ортоцентр треугольника EPQ. Докажите, что прямая OE проходит через центр окружности ω.

[ЦПМ, кружок по математике] А. Филатов
[*2024-2025*] группа 10-геом *8 октября*

Точка Микеля вписанного четырехугольника

1. Дан четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность с центром в точке O. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи AD и BC — в точке Q, диагонали AC и BD — в точке R. Пусть M — точка Микеля четвёрки прямых AB, BC, CD, DA. Докажите перечисленные ниже утверждения.

(a) Точки M, P, Q лежат на одной прямой.

(b) Точки B, O, D, M лежат на одной окружности (как и точки A, O, C, M).

(c) Точки M и R инверсны относительно окружности $(ABCD)$.

(d) Точка M — проекция точки O на прямую PQ.

2. Окружность с центром O проходит через вершины B и C неравнобедренного треугольника ABC и пересекает стороны AB, AC второй раз в точках P и Q. Окружности (ABC) и (APQ) пересекаются в точках A и M. Докажите, что $\angle OMA = 90°$.

3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке R. Окружности (ABR) и (CDR) пересекаются в точках R и X, окружности (BCR) и (DAR) пересекаются в точках R и Y. Докажите, что длина отрезка XY не превосходит расстояния от R до центра окружности $(ABCD)$.

4. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а AC и BD пересекаются в точке P. Прямые EP и AD пересекаются в точке K, а M - это середина AD. Докажите, что $BCMK$ вписан.

5. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, а стороны AB и CD в точке F. Точка K отмечена так, что $ABKC$ параллелограмм. Докажите, что $\angle AFE = \angle CDK$.

6. Дан равнобедренный треугольник ABC, M — середина основания BC. Точка P такова, что $PA \parallel BC$. Точки X и Y выбраны на продолжении отрезков PB и PC за точки B и C соответственно так, что $\angle PXM = \angle PYM$. Докажите, что $APXY$ вписанный.

7. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AC < BC$. Окружность проходит через точки A и B и пересекает отрезки CA и CB повторно в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и A_1B_1C пересекаются повторно в точке P. Отрезки AB_1 и BA_1 пересекаются в точке S. Точки Q и R симметричны S относительно прямых CA и CB. Докажите, что точки P, Q, R и C лежат на одной окружности.

8. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AC < BC$. Окружность с центром в проходит через точки A и B и пересекает отрезки CA и CB повторно в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и A_1B_1C пересекаются повторно в точке P. Докажите, что треугольники PAB_1 и PA_1B имеют общий центр вписанной окружности.

9. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в O. Обозначим $AD \cap BC = E$ и $AC \cap BD = F$. Окружность ω касается прямых AC и BD. PQ - диаметр окружности ω такой, что F - ортоцентр треугольника EPQ. Докажите, что прямая OE проходит через центр окружности ω.