Направления, добавка

Дежавю означает сбой в матрице

Из фильма "Матрица"

1. *(Как решать задачи, где условие не меняется при перестановке вершин A, B и C местами и нужно доказать страшное касание).* Даны точки A, B, C и D общего положения.

(a) Пусть D_a, D_b, D_c - образы точки D при симметриях относительно прямых BC, CA, AB соответственно. Докажите, что окружности $(ABC), (AD_cD_b), (D_aCD_b)$ и BD_cD_a имеют общую точку.

(b) Пусть D_a, D_b, D_c - образы точки D при симметриях относительно середин BC, CA, AB соответственно. Докажите, что окружности $(ABC), (AD_cD_b), (D_aCD_b)$ и BD_cD_a имеют общую точку.

(c) Пусть D_a, D_b, D_c - образы точки D при симметриях относительно прямых BC, CA, AB соответственно. Докажите, что окружности $(D_aD_bD_c), (ABD_c), (ACD_b)$ и BCD_a имеют общую точку.

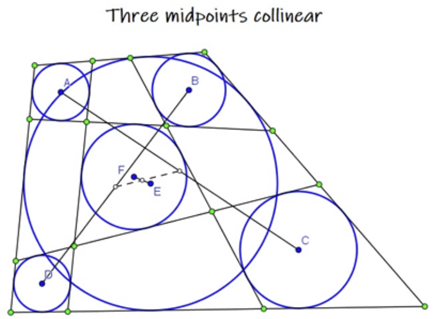
(d) Пусть D_a, D_b, D_c - образы точки D при симметриях относительно середин BC, CA, AB соответственно. Докажите, что окружности $(D_aD_bD_c), (ABD_c), (ACD_b)$ и BCD_a имеют общую точку.

(e) *(Почти теорема Айера).* Угол между окружностями $(D_aD_bD_c)$ из предыдущих двух пунктов равен $90° - \angle(DA, AB) - \angle(DB, BC) - \angle(DC, CA)$.

(f) *(Ради чего всё это было?).* Выведите теорему Фейербаха (окружность Эйлера касается вписанной окружности треугольника) из теоремы Айера.

(g) Посмотрите внимательно на похожие друг на друга пункты этой задачи. Нужно ли было так убиваться, решая каждый из них? Ради чего, мистер Андерсон? Сформулируйте общее утверждение, из которого они все следуют (возможно, следует сначала стереть одну из четырёх окружностей).

(f) *(Ну, и, раз такое дело...).* А теорему Айера можно как-то обобщить на картинку из предыдущей задачи?



2. Смотри картинку.

3. Пусть P - точка на описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точки D, E и F - отражения точки P относительно средних линий треугольника ABC, параллельных сторонам BC, CA и AB соответственно. Обозначим через ω_A, ω_B и ω_C описанные окружности треугольников ADP, BEP и CFP соответственно. Обозначим через ω описанную окружность треугольника, образованную серединными перпендикулярами к отрезкам AD, BE и CF. Докажите, что $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ и ω имеют общую