Изогональное сопряжение в четырехугольнике

Теорема. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка P. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $\angle APB + \angle CPD = 180°$.

(2) Проекции точки P на прямые AB, BC, CD, DA лежат на одной окружности.

(3) Существует точка, изогонально сопряжённая точке P относительно $ABCD$.

(4) Существует эллипс с фокусом в вершине P, вписанный в $ABCD$.

1. Докажите равносильность условий теоремы **(а)** (1) $\Leftrightarrow$ (2); **(б)** (2) $\Leftrightarrow$ (3).

2. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отметили ортоцентр H и центр описанной окружности O.

(a) Серединный перпендикуляр к отрезку AH пересекает стороны AB и AC в точках E и F. Докажите, что прямая OA — биссектриса угла EOF.

(b) Пусть $\angle BAC = 60°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AO пересекает стороны AB и AC в точках U и V. Докажите, что прямая HA — биссектриса угла UHV.

3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ Обозначим через I_A, I_B, I_C и I_D центры вписанных окружностей $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ и ω_D треугольников DAB, ABC, BCD и CDA соответственно. Оказалось, что $\angle BI_AA + \angle I_CI_AI_D = 180°$. Докажите, что $\angle BI_BA + \angle I_CI_BI_D = 180°$.

4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Докажите, что внутри него существует такая точка P, что

$$\angle PAB + \angle PDC = \angle PBC + \angle PAD = \angle PCD + \angle PBA = \angle PDA + \angle PCB = 90°$$

в том и только в том случае, когда диагонали AC и BD перпендикулярны.

5. В треугольнике ABC отмечен центр вписанной окружности I. Окружность, проходящая через B и касающаяся прямой AI в точке I, пересекает сторону AB повторно в точке P. Окружность, проходящая через C и касающаяся прямой AI в точке I, пересекает сторону AC повторно в Q. Докажите, что PQ касается вписанной окружности треугольника ABC.

6. Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке I. На отрезках AI, CI отмечены точки X и Y так, что $2\angle XBY = \angle ABC$. Докажите, что $2\angle XDY = \angle ADC$.

7. В описанном четырехугольнике $ABCD$ проведены пересекающиеся в точке P отрезки AM и DN, где точки M и N лежат на стороне BC. В треугольники MNP, APD, ABM и DCN вписаны окружности. Докажите, что их центры лежат на одной окружности.

8. Точка O — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Прямая CO пересекает высоту из вершины A в точке K. Точки P и M — середины отрезков AK и AC соответственно. Прямые PO и BC пересекаются в точке X. Окружность (BCM) пересекает прямую AB в точках B и Y. Докажите, что четырёхугольник $BXOY$ — вписанный.

9. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AH и диаметр AD описанной окружности. Точка I — центр вписанной окружности. Докажите, что $\angle BIH = \angle DIC$.

Изогональное сопряжение в четырехугольнике

Теорема. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка P. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $\angle APB + \angle CPD = 180°$.

(2) Проекции точки P на прямые AB, BC, CD, DA лежат на одной окружности.

(3) Существует точка, изогонально сопряжённая точке P относительно $ABCD$.

(4) Существует эллипс с фокусом в вершине P, вписанный в $ABCD$.

1. Докажите равносильность условий теоремы **(а)** (1) $\Leftrightarrow$ (2); **(б)** (2) $\Leftrightarrow$ (3).

2. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отметили ортоцентр H и центр описанной окружности O.

(a) Серединный перпендикуляр к отрезку AH пересекает стороны AB и AC в точках E и F. Докажите, что прямая OA — биссектриса угла EOF.

(b) Пусть $\angle BAC = 60°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AO пересекает стороны AB и AC в точках U и V. Докажите, что прямая HA — биссектриса угла UHV.

3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ Обозначим через I_A, I_B, I_C и I_D центры вписанных окружностей $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ и ω_D треугольников DAB, ABC, BCD и CDA соответственно. Оказалось, что $\angle BI_AA + \angle I_CI_AI_D = 180°$. Докажите, что $\angle BI_BA + \angle I_CI_BI_D = 180°$.

4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Докажите, что внутри него существует такая точка P, что

$$\angle PAB + \angle PDC = \angle PBC + \angle PAD = \angle PCD + \angle PBA = \angle PDA + \angle PCB = 90°$$

в том и только в том случае, когда диагонали AC и BD перпендикулярны.

5. В треугольнике ABC отмечен центр вписанной окружности I. Окружность, проходящая через B и касающаяся прямой AI в точке I, пересекает сторону AB повторно в точке P. Окружность, проходящая через C и касающаяся прямой AI в точке I, пересекает сторону AC повторно в Q. Докажите, что PQ касается вписанной окружности треугольника ABC.

6. Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке I. На отрезках AI, CI отмечены точки X и Y так, что $2\angle XBY = \angle ABC$. Докажите, что $2\angle XDY = \angle ADC$.

7. В описанном четырехугольнике $ABCD$ проведены пересекающиеся в точке P отрезки AM и DN, где точки M и N лежат на стороне BC. В треугольники MNP, APD, ABM и DCN вписаны окружности. Докажите, что их центры лежат на одной окружности.

8. Точка O — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Прямая CO пересекает высоту из вершины A в точке K. Точки P и M — середины отрезков AK и AC соответственно. Прямые PO и BC пересекаются в точке X. Окружность (BCM) пересекает прямую AB в точках B и Y. Докажите, что четырёхугольник $BXOY$ — вписанный.

9. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AH и диаметр AD описанной окружности. Точка I — центр вписанной окружности. Докажите, что $\angle BIH = \angle DIC$.