

ЧУМЫ

Определение. *Частично упорядоченным множеством* называют ориентированный граф без петель и кратных стрелок, для которого выполнено свойство транзитивности: для любых трех вершин u, v, w таких, что $u \rightarrow v$ и $v \rightarrow w$, верно $u \rightarrow w$.

Определение. *Цепью* называется последовательность вершин вида $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$. *Антицепью* называется набор вершин, попарно не соединённых рёбрами.

Теория

- (а)** Докажите, что в частично упорядоченном множестве размер максимальной цепи равен минимальному количеству антицепей, на которые оно разбивается. **(б)** Докажите, что в частично упорядоченном множестве количество элементов не больше размера максимальной антицепи, умноженного на размер максимальной цепи.
- Построим по частично упорядоченному множеству M двудольный граф G следующим образом. В левую долю G поместим копии элементов M . В правую долю G тоже поместим копии элементов M . Вершина u левой доли соединена с вершиной v правой доли тогда и только тогда, когда в M верно $u \rightarrow v$.

(а) Докажите, что размер минимального разбиения M на цепи равен

$$|M| - (\text{размер максимального паросочетания в } G)$$

(б) Докажите, что размер максимальной антицепи в множестве M не меньше

$$|M| - (\text{размер минимального вершинного покрытия ребер в } G)$$

(в) Теорема Дилуорса. Докажите, что в частично упорядоченном множестве размер максимальной антицепи равен минимальному количеству цепей, на которые оно разбивается.

Задачи

- Для данных натуральных r и s покажите, что любая последовательность различных чисел длины $rs+1$ содержит монотонно возрастающую подпоследовательность длины $r+1$ или монотонно убывающую длины $s+1$.
- В чемпионате по футболу участвуют 30 команд разной силы игры, и футбольный эксперт точно знает, как именно команды упорядочены по силе. За одну операцию разрешается предложить эксперту список из трёх команд, и он на своё усмотрение

назовёт либо самую сильную, либо самую слабую команду из этих трёх (при этом дополнительно сообщив, сильную или слабую команду он назвал). Определите максимально число k , для которого с помощью нескольких операций можно найти такую последовательность команд T_1, T_2, \dots, T_k , что для всех $1 \leq i < j \leq k$ команда T_i гарантированно слабее команды T_j .

- Вершины графа покрашены в k цветов правильным образом, при этом в $k-1$ цвет их покрасить нельзя. Цвета перенумерованы числами от 1 до k . Докажите, что можно выбрать путь, состоящий из k вершин, в котором i -я вершина была бы покрашена в i -й цвет.
- Рёбра полного ориентированного графа на n^2+1 вершине раскрашены в два цвета, причём одноцветных циклов нет. Докажите, что в графе существует одноцветный путь длины n .