Отрезки касательных и теорема Монжа

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи AD и BC — в точке Q. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда:

- $AB + CD = BC + AD$
- $AP + CQ = AQ + CP$
- $DQ + PD = BP + QB$

Теорема. *(О трёх центрах гомотетии)* Если композицией трёх гомотетии является тождественное преобразование плоскости, то их центры лежат на одной прямой.

Обычно полезно, думая про задачу, держать в уме такую версию утверждения:

Теорема Монжа. На плоскости нарисованы три непересекающихся (что будет если они пересекаются?) неравных круга. Для каждой пары кругов отметили две точки пересечения общих касательных: одну внешних, вторую внутренних. Тогда точки пересечения внешних общих касательных лежат на одной прямой. Более того, если центры кругов не лежат на одной прямой, то все шесть отмеченных точек служат вершинами четырёхстронника, т.е. лежат по три на четырёх прямых.

1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть ω_D и ω_B окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC. **(a)** Докажите, что если ω_D и ω_B касаются, то в $ABCD$ можно вписать окружность. **(b)** Докажите, что если $ABCD$ описанный четырёхугольник, то ω_D и ω_B касаются. **(c)** А как эта задача будет выглядеть, если $ABCD$ - ”внешнеописанный”? Сформулируйте и докажите аналог предыдущих двух пунктов для такого случая.

2. Две прямые, проходящие через точки пересечения пар противоположных сторон выпуклого четырёхугольника делят его на четыре меньших четырёхугольника. Докажите, что если два меньших четырёхугольника без общей стороны описанные, то и исходный четырёхугольник описанный.

3. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D. Оказалось, что AC_1DB_1 и CA_1DB_1 описанные. Докажите, что DC_1BA_1 тоже описанный.

4. Через вершину A треугольника ABC проведена произвольная прямая l, лежащая вне треугольника. Окружность ω_B касается отрезка AB, продолжения стороны BC за точку B и прямой l в точке P. Окружность ω_C касается отрезка AC, продолжения стороны BC за точку C и прямой l в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от выбора прямой l.

5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB, DC пересекаются в точке P, а лучи AD, BC в точке Q. Из точек P и Q внутрь углов APD и AQB проведено ещё по два луча, разбивающие четырёхугольник $ABCD$ на девять частей. Известно, что в части, примыкающие к вершинам B, C, D, можно вписать окружность. Докажите, что в часть, примыкающую к вершине A, также можно вписать окружность.

6. На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка X. Общая внешняя касательная к вписанным окружностям треугольников ABX и ACX, отличная от BC, пересекает отрезок AX в точке Y. Докажите, что длина отрезка AY не зависит от выбора точки X.

7. Окружность с центром I касается сторон BC, AC и AB неравнобедренного треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. В четырёхугольники AC_1IB_1 и CA_1IB_1 вписаны окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что общая внутренняя касательная к ω_1 и ω_2, отличная от IB_1, проходит через точку B.

8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $AB + AD = CB + CD$. В треугольники ABC, CDA вписаны окружности с центрами I_1, I_2. Докажите, что прямые AC, BD, I_1I_2 пересекаются в одной точке.

9. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки P и Q. Пусть K — точка пересечения общих внешних касательных к окружностям, вписанным в треугольники ABP и CBQ. Докажите, что точка K также является точкой пересечения общих внешних касательных для вписанных окружностей треугольников ABQ и CBP.

10. Внутри угла ABC с вершиной B отмечены точки P и Q так, что $\angle ABP = \angle QBC$ (P лежит внутри угла ABQ). В угол ABP вписана окружность ω_1, а в угол QBC вписана окружность ω_2. Пусть X - точка пересечения внутренних касательных к ω_1 и ω_2. Докажите, что прямая BX делит угол ABC пополам.

11. Окружность ω вписана в треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Вневписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке A'. Точка X выбирается на отрезке $A'A$ так, что отрезок $A'X$ не пересекает ω. Касательные, проведённые из X к ω, пересекают отрезок BC в точках Y и Z. Докажите, что сумма $XY + XZ$ не зависит от выбора точки X.

12. На стороне AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка P. В треугольник BPC вписана окружность ω с центром I. Оказалось, что окружность ω касается окружностей, вписанных в треугольники ABP и CDP, в точках Kи L соответственно. Обозначим через E точку пересечения отрезков AC и BD, а через F - точку пересечения прямых AK и DL. Докажите, что E, I и F лежат на одной прямой.

13. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB \neq BC$. В треугольники ABC и ADC вписаны окружности ω_1 и ω_2. Оказалось, что существует окружность Γ, которая касается продолжений отрезков BA и BC за точки A и C, а так же прямых AD и CD. Докажите, что общие внешние касательные к ω_1 и ω_2 пересекаются на Γ.