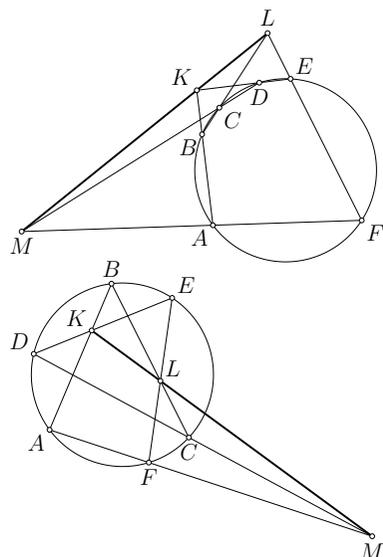
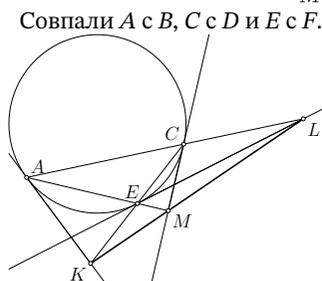
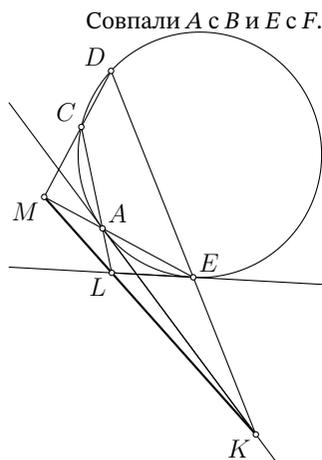
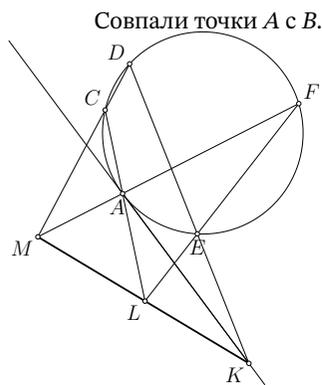


Теорема Паскаля

Теорема. Пусть шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Пусть $K = AB \cap DE$, $L = BC \cap EF$, $M = CD \cap AF$ (пересечения противоположных сторон). Тогда точки K, L, M лежат на одной прямой.

Комментарий. Утверждение теоремы остается верным, если $ABCDEF$ - произвольная замкнутая ломанная, вершины которой расположены на одной окружности.

Предельные положения точек. Рассмотрим «склеивание» соседних точек ломанной в одну. Прямые образованные этими точками перейдут в касательные к окружности.



1. Даны треугольник ABC и некоторая точка T . Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки T на прямые AB и AC соответственно, а R и S — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые TC и TB соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC .
2. Доказать, что во вписанном четырехугольнике точки пересечения противоположных сторон и точки пересечения касательных в противоположных вершинах лежат на одной прямой.
3. Окружность, проходящая через вершины A и D основания трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB, CD в точках P и Q , а диагонали — в точках E и F . Докажите, что прямые BC, PQ, EF пересекаются в одной точке.
4. Окружность ω проходит через вершины B, D четырехугольника $ABCD$ и пересекает его стороны AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Окружность Ω , проходящая через точки K и M , пересекает прямую AC в точках P и Q . Докажите, что точки P, Q, L, N лежат на одной окружности.
5. **Лемма Веррьера.** Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках P и Q соответственно, а также касается его описанной окружности. Докажите, что центр I вписанной в треугольник ABC окружности лежит на отрезке PQ .
6. Пусть точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC , Q — произвольная точка. Прямые AQ, BQ и CQ пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 — точки пересечения PA_1 с BC , PB_1 с CA и PC_1 с AB . Докажите, что точки A_2, B_2, C_2, Q лежат на одной прямой.
7. Даны пять точек некоторой окружности. С помощью одной линейки постройте еще одну точку этой окружности.
8. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна ее диаметру AB , а хорда AE делит радиус OC пополам. Докажите, что DE делит пополам BC .
9. В остроугольном треугольнике ABC угол A вдвое больше угла C . На биссектрисе угла A и на стороне AC отметили точки D и E соответственно так, что $\angle ADB = \angle AED = 90^\circ$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ADC лежит на прямой BE .