Целозначные многочлены

Определение. Многочлен $P(x)$ с вещественным коэффициентами называется *целозначным*, если он принимает целые значения при всех целых x.

Рассмотрим многочлены вида

$$\binom{x}{k} = C_x^k = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

1. Докажите, что многочлен C_x^k — целозначный.

2. Дан многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами степени n. Докажите, что $P(x)$ является линейной комбинацией многочленов $C_x^0, C_x^1, \ldots, C_x^n$ с вещественными коэффициентами, при этом коэффициенты определены однозначно.

Определение. Пусть $P(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. *Разностным многочленом* многочлена $P(x)$ называется многочлен

$$\Delta P(x) = P(x+1) - P(x).$$

3. Найдите многочлен ΔC_x^k.

4. Пусть m — целое число. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами степени n принимает целые значения в точках $m, m+1, \ldots, m+n$. Докажите, что этот многочлен является линейной комбинацией многочленов $C_x^0, C_x^1, \ldots, C_x^n$ с **целыми** коэффициентами. В частности, этот многочлен принимает целые значения во всех целых точках.

5. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами степени n таков, что числа $P\left(0^2\right), P\left(1^2\right), P\left(2^2\right), \ldots, P\left(n^2\right)$ — целые. Докажите, что число $P\left(k^2\right)$ является целым для любого целого k.

6. Даны простое число p и целозначный многочлен $P(x)$. Для целого числа n обозначим r_n остаток от деления $P(n)$ на p. Докажите, что последовательность $\{r_n\}$ периодична.

7. Целозначные многочлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что для всех целых n число $f(n)$ делится на $g(n)$. Докажите, что многочлен $f(x)$ делится на $g(x)$.

8. Назовём многочлен $P(x)$ *бицелозначным*, если числа $P(k)$ и $P'(k)$ целые при любом целом k. Пусть $P(x)$ — бицелозначный многочлен степени d, и пусть N_d — произведение всех составных чисел, не превосходящих d (произведение пустого множества сомножителей считаем равным 1). Докажите, что старший коэффициент многочлена $N_d \cdot P(x)$ — целый.

9. Даны натуральное число γ и вещественные числа $c, a_0, a_1, \ldots, a_n$. Оказалось, что функция

$$f(x) = c\gamma^x + a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

принимает целые значения при $x = 0, 1, \ldots, n+1$. Докажите, что функция f принимает целые значения во всех целых точках.