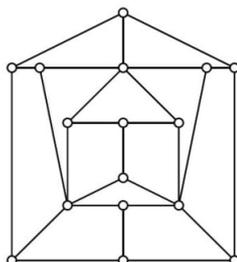


## Гамильтоновы пути и циклы

**Определение.** Гамильтонов путь (цикл) в графе — путь (цикл), проходящий через каждую вершину ровно по одному разу.

- (а) Докажите, что в полном ориентированном графе есть гамильтонов путь.

(б) Докажите, что в полном ориентированном сильно связном (то есть таком, что от любой вершины до любой другой есть ориентированный путь) графе есть гамильтонов цикл.
- Докажите, что грани планарного графа, в котором есть гамильтонов цикл, можно покрасить в 4 цвета правильным образом.
- Есть ли в данном графе гамильтонов цикл?



- (а) В графе степень каждой вершины не меньше  $k$ . Докажите, что в графе существует простой путь длины  $k$ .

(б) В графе на  $n \geq 3$  вершинах степень каждой вершины не меньше  $\frac{n-1}{2}$ . Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.

**Теорема Дирака.** (в) В графе на  $n \geq 3$  вершинах степень каждой вершины не меньше  $\frac{n}{2}$ . Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.
- Теорема Оре.** (а) В графе на  $n \geq 3$  вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше  $n$ . Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл. (б) В графе на  $n \geq 3$  вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше  $n - 1$ . Докажите, что в графе есть гамильтонов путь.
- Дан двудольный граф, по  $n$  вершин в каждой доле. Степень каждой вершины строго больше, чем  $\frac{n}{2}$ . Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.