Направления

Как многие помнят, *направленным углом* $\angle(l_1, l_2)$ между прямыми l_1 и l_2 называют угол, на который надо повернуть прямую l_1 против часовой стрелки, чтобы получить прямую, параллельную l_2. Значение направленного угла определено по модулю $180°$. Одно из основных свойств направленных углов:

$$\angle(l_1, l_2) + \angle(l_2, l_3) = \angle(l_1, l_3).$$

Заметим, что это свойство дает возможность параметризовать *направления* всех прямых относительно одной фиксированной. Зафиксируем прямую l_0. *Направлением* прямой l будем называть величину $\overline{l} = \angle(l_0, l)$. Тогда свойство выше переписывается вот так:

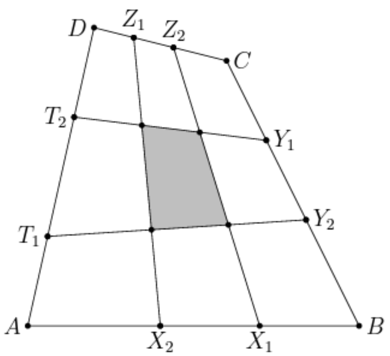
$$\angle(l_1, l_2) = \overline{l_2} - \overline{l_1}.$$

Еще некоторые полезные свойства, которые получаются из нашего определения:

- $\overline{l_1} = \overline{l_2} \Leftrightarrow l_1 \parallel l_2$
- $\overline{l_{AB}} + \overline{l_{CD}} = \overline{l_{BC}} + \overline{l_{AD}} = \overline{l_{AC}} + \overline{l_{BD}} \Leftrightarrow A, B, C, D$ на одной окружности или прямой
- $\overline{l_{AB}} + \overline{l_{AC}} = 2 \cdot \overline{l_{AX}} \Leftrightarrow AX$ - биссектриса между прямыми AB и AC (внешняя от внутренней не отличимы!)

Выше через l_{AB} обозначается прямая AB.

1. Смотри картинку. Известно, что четырёхугольники $ABCD$, $X_1X_2Z_1Z_2$, $Y_1Y_2T_1T_2$ вписанные. Докажите, что заштрихованный четырёхугольник также вписанный.



2. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки X и Y так, что $\angle BAX = \angle YAC$. **(a)** Докажите,что центры окружностей $(ABX), (ABY), (ACX), (ACY)$ лежат на одной окружности. **(b)** Докажите, что проекции точек B и C на прямые AX и AY лежат на одной окружности.

3. Внутри вписанного четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка X, что выполнено равенство $\angle XAB = \angle XBC = \angle XCD = \angle XDA$. Продолжения пар противоположных сторон AB и CD, BC и DA пересекаются в точках P и Q соответственно. Докажите, что $\angle PXQ$ равен углу между диагоналями BD и AC.

4. Вписанная окружность касается сторон AB, BC, CD, DA описанного четырёхугольника $ABCD$ в точках K, L, M, N соответственно. Середины отрезков NK, KL, LM, MN обозначены через A_0, B_0, C_0, D_0 соответственно. Докажите, что четырёхугольник, образованный прямыми AC_0, BD_0, CA_0, DB_0, вписанный.

5. Треугольник ABC ($\angle C \neq 90°$) вписан в окружность с центром O, на окружности отмечена точка D. Перпендикуляр, опущенный из D на BC, пересекает прямую AC в точке E. Докажите, что центр окружности (AED) лежит на окружности (AOB).

6. Точка P расположена внутри треугольника ABC. Точки K и L — проекции точки P на стороны AB и AC соответственно. Точка M на стороне BC такова, что $KM = LM$. Точки P и P' симметричны относительно точки M. Докажите, что углы BAP и CAP' равны.

7. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а диагонали AC и BD в точке S. Обозначим через M и N середины сторон BC и AD. Докажите, что окружность (MSN) касается прямой PS.

8. Внутри вписанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены такие точки P и Q, что $\angle PDC + \angle PCB = \angle PAB + \angle PBC = \angle QCD + \angle QDA = \angle QBA + \angle QAD = 90°$. Докажите, что прямая PQ образует равные углы с прямыми AD и BC.

9. На боковых сторонах AB и AC треугольника ABC выбрали точки X и Y соответственно так, что $XC = BC = BY$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника HXY, где H – ортоцентр, лежит на прямой Эйлера.