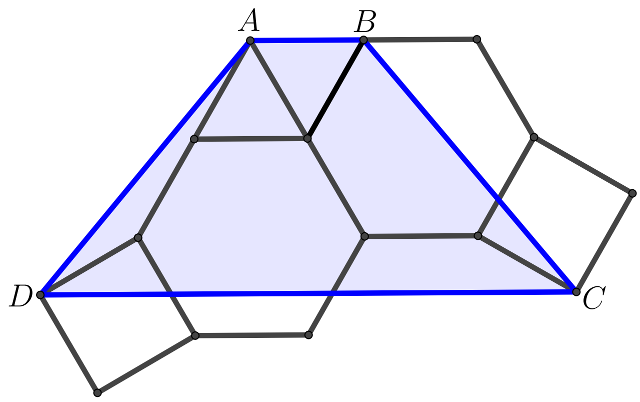
10-я Иранская олимпиада по геометрии

Начинающие

20 октября 2023 г.

Задания олимпиады необходимо держать в секрете до их публикации на официальном сайте олимпиады: igo-official.com. Заходите на сайт, чтобы найти задачи IGO прошлых лет и узнать о планах на будущее.

Задача 1. Все многоугольники на рисунке ниже — правильные. Докажите, что $ABCD$ — равнобедренная трапеция.



Задача 2. В равнобедренном треугольнике ABC с $AB = AC$ и $\angle A = 30^\circ$ точки L и M лежат на сторонах AB и AC соответственно так, что $AL = CM$. Точка K лежит на отрезке AB так, что $\angle AMK = 45^\circ$. Докажите, что если $\angle LMC = 75^\circ$, то $KM + ML = BC$.

Задача 3. Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной 1. Сколько точек P внутри квадрата (не на его сторонах) обладают следующим свойством: можно разрезать квадрат на 10 треугольников одинаковой площади так, чтобы P являлась вершиной каждого из них?

Задача 4. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, диагонали которого пересекаются в точке E. Оказалось, что $CD = BC = BE$. Докажите, что $AD + DC \geqslant AB$.

Задача 5. Внутри многоугольника проведены несколько попарно непересекающихся диагоналей, разрезающих его на треугольники; причем для каждой пары треугольников, имеющих общую сторону, сумма их углов, противолежащих этой стороне, больше 180°.

а) Докажите, что этот многоугольник выпуклый.

б) Докажите, что описанная окружность каждого треугольника разрезания содержит весь многоугольник.

Продолжительность олимпиады: 4 часа.
За полное решение каждой задачи даётся 8 баллов.

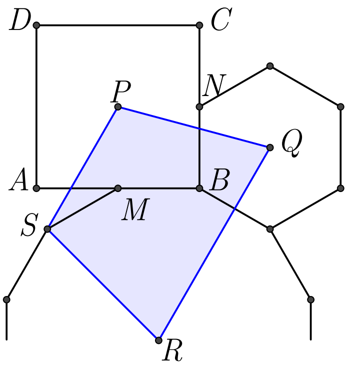
10-я Иранская олимпиада по геометрии

Продолжающие

20 октября 2023 г.

Задания олимпиады необходимо держать в секрете до их публикации на официальном сайте олимпиады: igo-official.com. Заходите на сайт, чтобы найти задачи IGO прошлых лет и узнать о планах на будущее.

Задача 1. Точки M и N — середины сторон AB и BC квадрата $ABCD$. На рисунке также изображены правильный шестиугольник и правильный 12-угольник. Точки P, Q и R являются центрами этих трёх многоугольников. Докажите, что $PQRS$ — вписанный четырехугольник.



Задача 2. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ и точка P внутри него. Оказалось, что $BCEF$ — квадрат, а ABP и PCD — равнобедренные прямоугольные треугольники с прямыми углами B и C соответственно. Прямые AF и DE пересекаются в точке G. Докажите, что GP и BC перпендикулярны.

Задача 3. Пусть ω — описанная окружность треугольника ABC, в котором $\angle B = 3\angle C$. Биссектриса угла A пересекает ω и BC в точках M и D соответственно. Точка E на прямой MC такова, что M лежит между C и E, а ME равно радиусу ω. Докажите, что описанные окружности треугольников ACE и BDM касаются друг друга.

Задача 4. Дан треугольник ABC, точка P — середина дуги BAC его описанной окружности, а H — его ортоцентр. Пусть Q, S — такие точки, что $HAPQ$ и $SACQ$ — параллелограммы. Обозначим середину AQ через T, а точку пересечения прямых SQ и PB — через R. Докажите, что прямые AB, SH и TR пересекаются в одной точке.

Задача 5. На плоскости отмечены n точек так, что не менее 99% из всех четырехугольников с вершинами в них выпуклы. Обязательно ли найдётся выпуклый многоугольник такой, что не менее 90% отмеченных точек являются его вершинами?

Продолжительность олимпиады: 4 часа 30 минут.
За полное решение каждой задачи даётся 8 баллов.

10-я Иранская олимпиада по геометрии

Профессионалы

20 октября 2023 г.

Задания олимпиады необходимо держать в секрете до их публикации на официальном сайте олимпиады: igo-official.com. Заходите на сайт, чтобы найти задачи IGO прошлых лет и узнать о планах на будущее.

Задача 1. Дан остроугольный треугольник ABC. Биссектриса угла BAC пересекает BC в точке P. Точки D и E лежат на отрезках AB и AC соответственно, так что $BC \parallel DE$. Точки K и L лежат на отрезках PD и PE соответственно, так что точки A, D, E, K, L лежат на одной окружности. Докажите, что точки B, C, K, L также лежат на одной окружности.

Задача 2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые BI, CI пересекают стороны AC, AB в точках X, Y соответственно. Пусть M — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC. Оказалось, что четырехугольник $MXIY$ вписанный. Докажите, что площадь четырехугольника $MBIC$ равна площади пятиугольника $BCXIY$.

Задача 3. На отрезке S длины L выбрано конечное число точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Для каждой точки A_i отмечен некоторый замкнутый круг c_i с центром в A_i и радиусом не более 1 (радиусы кругов могут различаться). Обозначим объединение всех c_i через C. Докажите, что периметр C меньше $4L + 8$.

Задача 4. В треугольнике ABC биссектрисы углов B и C пересекают стороны AC и AB в точках E и F соответственно. Обозначим точку пересечения BE и CF через I, а основание перпендикуляра из I на BC — через D. Пусть M и N — ортоцентры треугольников AIF и AIE соответственно. Прямые EM и FN пересекаются в точке P. Пусть X — середина BC. Точка Y на прямой AD такова, что $XY \perp IP$. Докажите, что прямая AI делит отрезок XY пополам.

Задача 5. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и AB соответственно, а D — проекция A на BC. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, описанные окружности треугольников BOC и DMN пересекаются в точках R и T. Прямые DT и DR пересекают прямую MN в точках E и F соответственно. Прямые CT и BR пересекаются в точке K. Точка P на прямой KD такова, что PK — биссектриса угла BPC. Докажите, что описанные окружности треугольников ART и PEF касаются.

Продолжительность олимпиады: 4 часа 30 минут.
За полное решение каждой задачи даётся 8 баллов.