Быстрые задачи
09 октября 2023 г.

1. На пустой шахматной доске расставляются ладьи по следующему правилу: каждым ходом в свободную клетку ставится ладья, и, если она кого-нибудь побила, то одна из побитых ею ладей снимается с доски. Какое наибольшее число ладей можно такими ходами поставить на доску?

2. Даны два непересекающихся множества натуральных чисел A и B и два натуральных числа a и b. Известно, что если $x \in A \cup B$, то или $x - a \in A$, или $x + b \in B$. Докажите, что $a|A| = b|B|$.

3. Изначально на доске в ряд были выписаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2023$. На очередном шаге процесса под каждым числом пишут сумму всех чисел в ряду до него включительно, после чего старый ряд стирают. Какое наибольшее количество чётных чисел может содержаться в ряду после нескольких шагов?

4. Последовательность a_n натуральных чисел задаётся первым членом $a_1 > 100$ и соотношением $a_{k+1} = a_k^2 - 1$ при всех натуральных k. Может ли так оказаться, что любое простое число будет делителем какого-то члена этой последовательности?

5. На катетах AB, AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90°$) выбраны точки P и Q соответственно. Из точек A, P, Q опущены перпендикуляры AH, PK, QL на гипотенузу BC. Докажите, что $PQ + PK + QL \geqslant 2AH$.

6. Докажите, что среди значений неконстантного многочлена $P(x)$ с натуральными коэффициентами в натуральных точках есть бесконечно много чисел, содержащих в своей десятичной записи 100 цифр 7 подряд.

7. Клетчатый квадрат 60×60 разбит на плиточки 2×5. Докажите, что можно задать разбиение квадрата на прямоугольники 1×3 такое, что каждая плиточка 2×5 будет содержать хотя бы один прямоугольник 1×3.

8. Вещественные числа x, y, z таковы, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$. Докажите, что для любого нечётного натурального числа n выполнено

$$\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} + \frac{1}{z^n} = \frac{1}{(x+y+z)^n}\,.$$