**Геометрия**
**09 октября 2023 г.**

**1.** В треугольнике $ABC$ отмечен инцентр $I$. Прямая $AI$ пересекает сторону $BC$ и окружность $(ABC)$ второй раз в точках $L$ и $N$ соответственно. Точка $X$ — отражение точки $I$ относительно прямой, соединяющей инцентры треугольников $LNB$ и $LNC$. Докажите, что $\angle BXC = 90^\circ$.

**2.** На стороне $BC$ остроугольного треугольника $ABC$ выбрана точка $D$. Точки $O_B$ и $O_C$ — центры описанных окружностей треугольников $ABD$ и $ACD$ соответственно. Оказалось, что точки $B, C, O_B, O_C$ лежат на одной окружности с центром в точке $X$. Докажите, что $\angle DAX = \angle DAH$, где точка $H$ — ортоцентр треугольника $ABC$.

**3.** Дан параллелограм $ABCD$. На отрезке $CD$ выбрана точка $E$ так, что $2\angle AEB = \angle ADB + \angle ACB$; на отрезке $BC$ выбрана точка $F$ так, что $2\angle DFA = \angle DCA + \angle DBA$. Точка $S$ — центр окружности $(ABD)$. Докажите, что $SE = SF$.

**4.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB = AC$) проведена высота $AA_0$. Окружность $\gamma$ с центром в середине отрезка $AA_0$ касается прямых $AB$ и $AC$. Из точки $X$ прямой $BC$ проведены две касательные к окружности $\gamma$. Докажите, что эти касательные высекают на прямых $AB$ и $AC$ равные отрезки.

**5.** Suppose $ABCD$ is a parallelogram. Consider circles $w_1$ and $w_2$ such that $w_1$ is tangent to segments $AB$ and $AD$ and $w_2$ is tangent to segments $BC$ and $CD$. Suppose that there exists a circle which is tangent to lines $AD$ and $DC$ and externally tangent to $w_1$ and $w_2$. Prove that there exists a circle which is tangent to lines $AB$ and $BC$ and also externally tangent to circles $w_1$ and $w_2$.

**6.** В остроугольном неравнобедренном треугольнике $ABC$ отмечены инцентр $I$ и середина $N$ дуги $BAC$ описанной окружности. Прямая $AN$ пересекает прямую $BC$ в точке $L$. На отрезке $AI$ нашлась такая точка $X$, что $\angle XNI = \angle ALI$. Прямая $NX$ пересекает прямую $BC$ в точке $Y$. Докажите, что точка $X$ — середина отрезка $NY$.

**7.** In convex pentagon $ABCDE$ points $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, $E_1$ are intersections of pairs of diagonals $(BD, CE)$, $(CE, DA)$, $(DA, EB)$, $(EB, AC)$ and $(AC, BD)$ respectively. Prove that if four of quadrilaterals $AB_1A_1B$, $BC_1B_1C$, $CD_1C_1D$, $DE_1D_1E$ and $EA_1E_1A$ are cyclic then the fifth one is also cyclic.

**8.** В остроугольном треугольнике $ABC$ точка $H$ — ортоцентр, точка $I$ — центр вписанной окружности, точка $D$ — основание высоты из вершины $A$. Точки $M$ и $N$ — центры вписанных окружностей треугольников $ABD$ и $ACD$ соответственно. Точки $K$ и $L$ являются центрами вневписанных окружностей треугольников $HBD$ и $HCD$, касающихся стороны $HD$. Докажите, что прямые $HI$, $KM$ и $LN$ пересекаются в одной точке.