Открываем заново линейную алгебру
07 октября 2023 г.

1. (a) Даны три квадратных трёхчлена $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ с вещественными коэффициентами. Докажите, что существует ненулевой однородный многочлен $S(u, v, w)$ с вещественными коэффициентами степени 2, что при всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено $S\big(f(x), g(x), h(x)\big) = 0$.
(b) Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с вещественными коэффициентами. Докажите, что существует такой ненулевой многочлен $R(x, y)$ от двух переменных с вещественными коэффициентами, что $R\big(P(x), Q(x)\big) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

2. В вершинах правильного 1001-угольника стоят нули. За один ход разрешается выписать на доску целое число $1 \leqslant k \leqslant 500$, выбрать любую вершину многоугольника, прибавить к числу в ней 2, а из чисел, стоящих в вершинах, отстоящих от выбранной по часовой и против часовой стрелки на k, вычесть по 1. Через несколько ходов в вершинах вновь оказались нули. Докажите, что сумма квадратов выписанных на доску чисел кратна 1001.

3. Назовём *расстоянием* между двумя точками $X = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ величину

$$|XY| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Докажите, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ нельзя выбрать $n + 2$ различные точки так, чтобы все попарные расстояния были одинаковыми.

4. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами и натуральное число n таковы, что при всех $k = 0, 1, \ldots, n$ выполнено

$$\int_0^1 x^k P(x)dx = 0.$$

Докажите, что у многочлена $P(x)$ на отрезке $[0, 1]$ есть не меньше $(n + 1)$ различных вещественных корней.

5. В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор подписчиков среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг — целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью.

Пусть p — простое число. Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей делились на p. Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и увеличить его рейтинг на 1, либо ничего не делать. Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели.

6. Докажите, что на плоскости нельзя отметить 22 различные точки и провести 22 различные окружности так, чтобы на любой отмеченной окружности лежало не менее 7 отмеченных точек и чтобы каждая точка лежала не менее чем на 7 отмеченных окружностях.