

Вокруг классики комбинаторики
23 сентября 2023 г.

1. В некоторых клетках бесконечной клетчатой полоски стоят фишки, причём в одной клетке может быть несколько фишек (всего фишек конечное число). За одну операцию разрешается выбрать клетку с как минимум двумя фишками и переложить две фишки оттуда в соседние клетки: одну влево, другую вправо. Докажите, что вне зависимости от порядка операций процесс всегда закончится за фиксированное количество операций, и что финальное распределение не зависит от порядка операций.

2. Клетчатый прямоугольник $m \times n$ склеен в тор. Докажите, что число способов разрезать тор на связные клетчатые прямоугольники чётной площади чётно. (Два разрезания считаются одинаковыми, если в них полностью совпадают линии разрезов. Например, для тора 2×1 есть ровно два разрезания.)

3. В матрице $3n \times 3n$ стоят вычеты по модулю 3. Известно, что разность любых двух столбцов — столбец с n нулями, n единицами и n двойками. Докажите, что разность любых двух строк — строка с n нулями, n единицами и n двойками.

4. (*IMO-SL-2001*) Дано натуральное число n . В школьной библиотеке имеется n одинаковых учебников по физике и n одинаковых учебников по истории. Библиотекарь ставит все $2n$ книг на одну полку. Две расстановки книг назовём *похожими*, если одну расстановку можно получить из другой так:

- вытащить одну книгу;
 - сдвинуть остальные $2n - 1$ книгу вместе;
 - вставить книгу обратно в любое место: на край или между двумя книгами.
- Докажите, что можно придумать $\frac{1}{n+1}C_{2n}^n$ расстановок книг так, чтобы любая другая расстановка была похожа на одну из придуманных.

5. Найдите все натуральные n , для которых правильный вомьмиугольник со стороной n можно разбить на прямоугольники 2×1 и ромбы со стороной 1 и углом 45° .

6. Докажите, что для любых натуральных n и k существует такой полный ориентированный граф G , обладающий свойством: для любого множества A , состоящего из k вершин графа G , существует такое множество B , состоящее из n вершин графа G , что A и B не имеют общих вершин и нет никаких стрелок из A в B .