Комбинаторная геометрия
15 сентября 2023 г.

1. На плоскости отмечены n различных точек. Докажите, что среди них можно выделить хотя бы $\sqrt{n}$ так, чтобы никакие три выделенные точки не были вершинами равностороннего треугольника.

2. На плоскости есть две системы точек $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ и $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ с различными центрами масс. Докажите, что на плоскости есть точка P, что

$$|PA_1| + |PA_2| + \ldots + |PA_n| = |PB_1| + |PB_2| + \ldots + |PB_n|.$$

3. Большой прямоугольник разрезан на маленькие прямоугольники, у каждого из которых длина хотя бы одной из сторон — целое число. Докажите, что у большого прямоугольника длина хотя бы одной из сторон — целое число.

4. (*IMO-SL-2018*) На плоскости дана окружность ω радиуса 1. Найдите все положительные числа t такие, что в окружность можно вписать сколь угодно много треугольников, никакие два из которых не имеют общих внутренних точек, так, что периметр каждого строго больше t.

5. Дано натуральное число $n > 2$. Какое наименьшее количество точечных сторожей можно расставить внутри или на границе любого не обязательно выпуклого n-угольника так, чтобы любая точка внутри или на границе многоугольника была видна хотя бы одному сторожу?

6. Дан квадрат с зелеными и красными точками внутри, никакие три точки не лежат на одной прямой (включая вершины квадрата). Два верхние вершины квадрата — красные, два нижние — зеленые. Докажите, что можно некоторые пары красных точек соединить отрезками и некоторые пары зелёных точек соединить отрезками так, чтобы никакие два отрезка не имели общих внутренних точек и чтобы из любой точки можно было добраться по отрезкам до любой другой точки того же цвета.

7. Полоса П, ограниченная двумя параллельными прямыми, разрезана на 10 одинаковых полос, шахматно раскрашенных в чёрный и белый цвета. Выпуклый многоугольник P вписан в полосу П: лежит внутри и имеет общие точки с обеими граничными прямыми. Докажите, что не менее 45% площади многоугольника P закрашено в чёрный.

8. На плоскости отмечены n точек в *супер-общем положении*: никакие три не лежат на одной прямой, и никакие четыре – на одной окружности. Выпуклая оболочка этих точек изначально разрезана на треугольники с вершинами в отмеченных точках. За одну операцию разрешается выбрать в разрезании два смежных треугольника ABC и ADC с условием $\angle ABC + \angle ADC > 180°$, стереть отрезок AC и нарисовать отрезок BD, тем самым получив новое разрезание на треугольники. Докажите, что **(a)** операции когда-нибудь закончатся; **(b)** финальная триангуляция не зависит от операций; **(c)** количество операций будет меньше $\frac{n(n-1)}{2}$.

9. Докажите, что существует такое положительное число C, что как ни расположить на плоскости конечное число одинаковых квадратиков 1×1, в объединении образующих одну связную фигуру без дырок, отношение периметра фигуры к площади будет меньше C. (Квадратики — не обязательно параллельные копии друг друга.)