

**Функциональные уравнения**  
**09 сентября 2023 г.**

1. (*IMO-SL-2002*) Найдите все функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что  $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

2. (*IMO-2008*) Найдите все функции  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ , что

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

для всех четвёрок  $(w, x, y, z)$  положительных чисел с условием  $wx = yz$ .

3. Найдите все функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \cos y.$$

4. (*IMO-2002*) Найдите все функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что при всех  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz).$$

5. Найдите все функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

6. (*IMO-SL-2018*) Найдите все функции  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что для всех положительных вещественных чисел  $x$  и  $y$  выполнено

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) f(y) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right).$$

7. (*Финал ВсОШ-1993*) Найдите все функции  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ , что для всех положительных чисел  $x$  и  $y$  выполнено

$$f(x^y) = f(x)^{f(y)}.$$

8. Найдите все функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что при всех  $x, y \in \mathbb{R}$  справедливо

$$f(xf(y)) = (1 - y)f(xy) + x^2y^2f(y).$$