XXVI КУБОК ПАМЯТИ А.Н.КОЛМОГОРОВА. Псков, 26.11 – 03.12.2023

КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА. ЮНИОРЫ.

1. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют неравенству $(x+y+z)^2 > 2(x^2+y^2+z^2)$. Докажите, что они либо все положительные, либо все отрицательные.

2. В равностороннем треугольнике ABC на сторонах BC, CA, AB отмечены точки D, E, F соответственно так, что $\angle ADE = \angle DEF = 60^\circ$, и кроме того, $BD : DC = 1 : 2$. Найдите отношение $AF : FB$.

3. Последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ определена условиями

$$a_1 = 1 + \sqrt{2} \quad \text{и} \quad (a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1} - 2\sqrt{n}) = 2 \quad \text{при } n \geqslant 2.$$

Найдите a_{2023}.

4. В клетках таблицы $n \times n$ Вася хочет расставить крестики и нолики так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце был ровно один крестик и ровно один нолик. Ставить два знака в одну клетку нельзя. Маша может разложить в некоторых клетках бумажки с надписями «Сюда нельзя ставить крестик» и «Сюда нельзя ставить нолик». Две бумажки класть в одну клетку нельзя. При каком наименьшем k Маша может так разложить не более, чем по k бумажек каждого из двух видов так, чтобы Вася не смог расставить свои знаки, не нарушая машиных запретов?

5. Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 10$ найдутся такое m и натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_m, что $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ и $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_m}$ будет натуральным числом, не превосходящим трех.

6. Окружность с центром I вписана в остроугольный треугольник ABC и касается его стороны BC в точке D. Точка Z диаметрально противоположна точке A на описанной окружности Ω треугольника ABC. Точка L на внутренней биссектрисе угла BZC такова, что $AL = LI$, кроме того, точка L лежит внутри Ω. Точка M — середина дуги BZC описанной окружности ABC, точка V — середина отрезка ID. Докажите, что $\angle IML = \angle DVM$.

7. Дано простое $p > 2$ и натуральные числа a, b, c, d, не кратные p, а также натуральное M. Известно, что разность $ca^k - db^k$ при некоторых целых неотрицательных k делится на p, но ни при каких целых неотрицательных k не делится на p^M. Докажите, что при всех k, для которых $ca^k - db^k$ кратно p, степень вхождения p в $ca^k - db^k$ одна и та же.

8. Строка Σ состоит из прописных букв латинского алфавита, причем каждая из 26 таких букв встречается в ней хотя бы один раз. Для каждой перестановки букв A, B, $\ldots$, Z количество способов вычеркнуть из Σ буквы так, чтобы осталась эта перестановка, одно и то же. Докажите, что Σ содержит не менее 5784 букв.