

Угнетающие задачи по геометрии

1. Даны треугольник ABC ($AB > AC$) и описанная около него окружность. Постройте циркулем и линейкой середину дуги BC (не содержащей вершину A), сделав не более двух построений.
2. На плоскости заданы точки A, B, C , не лежащие на одной прямой. Рассматриваются всевозможные равносторонние треугольники, каждая из сторон которых содержит одну из этих точек. Найдите ГМТ центров таких треугольников.
3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке P . На биссектрисе угла APD нашлась точка Q такая, что прямые BQ и CQ делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.
4. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P . Докажите, что прямая, проходящая через ортоцентры треугольников APD и BPC проходит через точку пересечения диагоналей четырёхугольника в том и только в том случае, когда он является вписанным.
5. В треугольнике ABC выполнено равенство $AB = BC + \frac{AC}{\sqrt{2}}$. Точки M и N — основания биссектрисы и медианы из вершины B . Докажите, что $\angle BMC + \angle BNC = 90^\circ$.
6. Дан параллелограмм $ABCD$. На отрезке CD выбрана точка E таким образом, что $2\angle AEB = \angle ACB + \angle ADB$. На отрезке BC выбрана точка F таким образом, что $2\angle AFD = \angle ABD + \angle ACD$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABD . Докажите, что $OE = OF$.
7. Вписанная и невписанная окружности треугольника ABC касаются отрезка AC в точках B_1 и B_2 . Оказалось, что $2\angle B_1BB_2 = \angle ABC$. Докажите, что $2B_1B_2 = AC$.