# Американская замена и ЛОЛ

**Американская замена.** Если у вас есть переменные $x_1, x_2, \dots x_n$ с условием $x_1 x_2 \dots, x_n = 1$, то можно сделать замену $x_1 = \frac{a_2}{a_1}, x_2 = \frac{a_3}{a_2}, \dots, x_n = \frac{a_1}{a_n}$, где на переменные $a_1, a_2, \dots, a_n$ уже никаких условий нет.

**Лучшая Олимпиадная Лемма:** если $x_1 x_2 \dots x_n = 1$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + x_i + x_i x_{i+1} + \ldots + x_i x_{i+1} \dots x_{i+n-2}} = 1 \quad \text{(все индексы по модулю } n\text{)}$$

**Святая мысль (по жизни).** Если у вас в неравенствах есть дроби, то хороший план оценить (огрубить) их знаменатели так, чтобы они все стали равны и все дроби хорошо сложились :)

1. Ну, докажите ЛОЛ.

2. (Всеросс 2004 9.4) Для положительных $x_1, x_2, \dots, x_n$, таких что $x_1 x_2 \dots x_n = 1$, докажите неравенство
$$\frac{1}{1 + x_1 + x_1 x_2} + \frac{1}{1 + x_2 + x_2 x_3} + \ldots + \frac{1}{1 + x_n + x_n x_1} > 1.$$

3. Для положительных $a, b, c, d$, таких что $abcd = 1$, докажите неравенство
$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} > 1.$$

4. Для положительных $a, b, c$, таких что $abc = 1$, докажите неравенство
$$\frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} + \frac{2}{(b+1)^2 + c^2 + 1} + \frac{2}{(c+1)^2 + a^2 + 1} \leqslant 1.$$

5. Для положительных $a, b, c$, таких что $abc = 1$, докажите неравенство
$$\frac{1}{a^2 + 2ab} + \frac{1}{b^2 + 2bc} + \frac{1}{c^2 + 2ca} \geqslant 1.$$

6. Произведение положительных чисел $a, b, c$ равно 1. Докажите, что
$$\frac{1}{2a^2 + b^2 + 3} + \frac{1}{2b^2 + c^2 + 3} + \frac{1}{2c^2 + a^2 + 3} \leqslant \frac{1}{2}$$

7. Для положительных чисел $a, b$ и $c$, произведение которых равно 1, докажите неравенство
$$\frac{1}{a^3 + 2b^2 + 2b + 4} + \frac{1}{b^3 + 2c^2 + 2c + 4} + \frac{1}{c^3 + 2a^2 + 2a + 4} \leqslant \frac{1}{3}$$