Теоремы Форда-Фалкерсона и Эдмондса-Карпа

Сетью называется взвешенный ориентированный граф $G(V, E, c)$ такой, что вес $c(u, v)$ на каждом ребре $(u, v) \in E$ неотрицательный. Отображение $c : E \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ называется *функцией пропускной способности*, а $c(u, v)$ *пропускной способностью* ребра из u в v. Отметим, что $c(u, v)$ и $c(v, u)$ не обязательно равны. Если граф неполный, то можно дополнить множество E недостающими до полноты рёбрами, считая их пропускные способности нулевыми, это несколько упрощает обозначения.

Пусть задана сеть $G(V, E, c)$. Выберем в ней две вершины s, t такие, что $\forall v \in V$ выполнено условие $c(v, s) = c(t, v) = 0$. Назовём их *источником* и *стоком* соответственно. *Потоком от вершины s до вершины t* называется функция $f : E \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ такая, что:

1. $\forall (u, v) \in E$ выполнено неравенство $c(u, v) \geqslant f(u, v)$.

2. $\forall v \in V \backslash \{s, t\}$ выполнено равенство $\sum\limits_{u \in V} f(u, v) = \sum\limits_{w \in V} f(v, w)$.

3. (Не обязательное свойство) $\forall u, v$ либо $f(u, v) = 0$, либо $f(v, u) = 0$.

Величина $|f|$ потока f определяется формулой $|f| = \sum\limits_{v \in V} f(s, v)$.

Определим *граф потока* $G_{f>0}(V_{f>0}, E_{f>0}) \subseteq G$ тем, что $V_{f>0} = V, E_{f>0} = \{e \in E | f(e) > 0\}$.

Остаточным потоком потока f называется граф $G_f(V_f, E_f, c_f)$ такой, что $V_f = V$, а для каждой пары вершин u, v таких, что $f(u, v) > 0$ в графе присутствуют два ребра $(u, v), (v, u) \in E_f$, причём $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$, $c_f(v, u) = c(v, u) + f(u, v)$.

Разрезом сети с потоком назовём два непересекающихся множества $S, T \subset V$, таких, что $S \cup T = V$ и $s \in S, t \in T$. Обозначение: (S, T).

1. Поток f называется *редуцированным*, если $G_{f>0}$ не имеет ориентированных циклов. Докажите, что если в сети существует поток g, то в этой же сети существует редуцированный поток g' такой, что $|g| = |g'|$.

2. **(а)** *Величиной потока f через разрез* (S, T) назовём число

$$f(S, T) = \sum_{u \in S, v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S, v \in T} f(v, u).$$

Докажите, что $|f| = f(S, T)$ для любого разреза (S, T) и потока f.

(б) Докажите, что $|f| = \sum\limits_{v \in V} f(v, t)$.

(в) Докажите, что $G_{f>0}$ для редуцированного f представим в виде объединения простых путей из s в t таких, что пропускная способность рёбер одного пути одинаковая.

(г) *Пропускной способностью сети через разрез* (S, T) будем называть число $c(S, T) = \sum\limits_{u \in S, v \in T} c(u, v)$. Докажите, что $|f| \leqslant c(S, T)$ для любого потока f и разреза (S, T).

3. **(Теорема Форда-Фалкерсона)** Поток f на сети $G(V, E, c)$ называется *максимальным*, если для любого другого потока f' на G мы имеем $|f'| \leqslant |f|$. Докажите равносильность следующих утверждений:

   - Поток f является максимальным на G.
   - Вершина t не является достижимой из вершины s в графе G_f.
   - Для некоторого разреза $|f| = c(S, T)$.

4. **(Теорема Эдмондса-Карпа)**

   (а) Пусть f' – поток на G_f, докажите, что $f'' = f + f'$ (а что это могло бы означать?) будет потоком на G.

   (б) Будем постепенно увеличивать поток f. В качестве графа для потока f' возьмём путь минимальной длины из s в t, а в качестве его величины возьмём минимальную из пропускных способностей рёбер в нём. Докажите, что расстояние от s до v в графе G_f не больше, чем в графе $G_{f''}$.

   (в) Докажите, что не более чем за $\frac{1}{2}|V||E|$ добавлений путей по алгоритму из прошлого пункта поток станет максимальный.

5. Сведите следующие задачи к поиску максимального потока/минимального разреза/теореме Форда-Фалкерсона/теореме Эдмондса-Карпа:

   (а) В сети есть несколько узлов и несколько стоков. Какой максимальный поток может протекать от совокупности источников к совокупности стоков?

   (б) Также в сети есть ограничение на пропускную способность вершин (то есть ограничение на сумму входящей величины потока). Какой максимальный поток возможен в такой сети?

   (в) **(Теорема Менгера реберная)** Дан граф G и его вершины u и v. Пусть при удалении любых $k - 1$ ребер в оставшемся графе существует путь между u и v. Тогда в G существует k путей из u в v, не имеющие общих ребер.

   (г) **(Теорема Менгера вершинная)** Дан граф G и его несмежные вершины u и v. Пусть при удалении любых $k - 1$ вершин в оставшемся графе существует путь между u и v. Тогда в G существует k путей из u в v, не имеющие общих внутренних вершин.

   (д) **(Лемма Холла)** Если в двудольном графе любые k вершин первой доли в общей сложности смежны не менее чем с k вершинами второй доли, то существует паросочетание, мощность которого равна мощности первой доли.

   (е) **(Теорема Кёнига)** Для любого двудольного графа мощность максимального паросочетания равна мощности минимального вершинного покрытия ребер. (Указание: каким образом связано минимальное вершинное покрытие и минимальный разрез графа?)

   (ж) **(Теорема Дилоурса)** Дан ориентированный граф без ориентированных циклов. *Цепью* называется множество вершин, в котором для любых двух вершин одна из них достижима из другой. *Антицепью* называется множество вершин, ни одна из которых не достижима из другой. Тогда минимальное число цепей, на которые можно разбить данный граф равно мощности максимальной антицепи.