В меру идейный разнобой

1. На дереве висят 2024 шишки. Двое играют в следующую игру: они по очереди сбивают с дерева от одной до трёх шишек. Также в процессе игры ровно один раз кто-то из игроков может пропустить ход (кто успел). Проигрывает тот игрок, кто собьёт последнюю шишку с дерева. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

2. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, H — основание его высоты из вершины A. Луч MH пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что окружность (BKH) касается прямой AB.

3. Числа $P_1, P_2, \ldots, P_n$ являются перестановкой набора $\{1, 2 \ldots, n\}$ (каждое из P_i равно одному из $1, 2 \ldots, n$ и все P_i различны). Докажите неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_i + P_{i+1}} \geqslant \frac{n-1}{n+2}.$$

4. Диагональ выпуклого многоугольника называется *хорошей*, если с каждой стороны от неё расположено чётное число сторон. 100-угольник разбит на треугольники непересекающимися диагоналями, среди которых ровно 49 хороших. Треугольники раскрасили в два цвета правильным образом (т.е. треугольники, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета). Докажите, что треугольников первого и второго цветов поровну.

5. Докажите, что расстояние между серединой стороны BC треугольника ABC и серединой дуги ABC его описанной окружности не меньше, чем $AB/2$.

6. Тройка целых чисел (x, y, z), наибольший общий делитель которых равен 1, является решением уравнения $y^2z + yz^2 = x^3 + x^2z - 2xz^2$. Докажите, что z является кубом целого числа.

7. Каждые две из 77 точек соединены синим или зелёным отрезком. Известно, что 77 точек можно хотя бы одним способом разбить на 7 групп так, что в каждой группе любые две точки соединены зелёным отрезком. Известно также, что в любом таком разбиении каждая группа содержит ровно 11 точек. Найдите наибольшее возможное число зелёных отрезков.