

Точка Шалтая

Точкой Шалтая (Humpty point) треугольника ABC называется такая точка H , что $\angle HBA = \angle HAC$, $\angle HBC = \angle HCA$. Свойства

- Точка Шалтая лежит на описанной окружности треугольника AHC .
- Отражение точки Шалтая относительно стороны AC лежит на описанной окружности треугольника ABC .
- Точка Шалтая лежит на медиане треугольника ABC .
- Точка Шалтая является проекцией ортоцентра на медиану.
- Точка Шалтая лежит на описанной окружности треугольника A_1HC_1 , где A_1 и C_1 – основания высот.

• Пусть A_1C_1 пересекает продолжение стороны AC в точке S . Точка Шалтая лежит на прямой SH .

1. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Пусть K_1 и K_2 – точки на ω_1 и ω_2 соответственно такие, что K_1A касается ω_2 , а K_2A касается ω_1 . Описанная окружность треугольника K_1BK_2 пересекает вторично прямые AK_1 и AK_2 в точках L_1 и L_2 соответственно. Докажите, что прямая AB делит отрезок L_1L_2 пополам.
2. Стороны BC и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ равны. Точка E – отражение B относительно C . Докажите, что отражение точки пересечения диагоналей $ABCD$ относительно BC лежит на окружности (ABE) .
3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O и диаметром AD . Лучи AD и BC пересекаются в точке E , а описанные окружности треугольников ABO и DCO в точке F . Докажите, что $\angle EFO = 90^\circ$.
4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки C' и A' , так что четырёхугольник $XC'BA'$ – вписанный в окружность Ω , где X – точка пересечения прямых AA' и CC' . Тогда окружность Ω проходит через точку Шалтая.
5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BE и CF . Две окружности проходят через A и F и касаются BC в точках P и Q так, что точка B лежит на отрезке PQ . Докажите, что прямые PE и QF пересекаются на окружности AEF .
6. Внешняя биссектриса угла B треугольника ABC пересекает продолжение стороны AC в точке D . Пусть I – центр вписанной окружности, I_B – центр внеписанной окружности, касающейся стороны AC ; а L – середина большей дуги AC описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что $DI \perp LI_B$.
7. Биссектриса BD треугольника ABC пересекает его высоты AA_1 и CC_1 в точках A_2 и C_2 . Докажите, что описанные окружности треугольников AA_2D и CC_2D пересекаются на медиане треугольника ABC .