Ещё разнобой по ТЧ

1. Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots$ — бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а $p_1, p_2, p_3, \dots$ — последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n - a_k = p_n - p_k$. Докажите, что все числа $a_1, a_2, \dots$ простые.

2. Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n. Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b. Докажите, что $a = b$.

3. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b найдутся такие различные простые числа p и q, большие 10^{2024}, что число $ap + bq$ окажется составным.

4. Пусть $p > 5$ — простое число и $S := \{p - n^2 : n \in \mathbb{N}, n^2 < p\}$. Докажите, что во множестве S найдутся два числа, одно из которых делит другое.

5. Докажите, что существует натуральное число n, большее 10^{2024}, такое, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

6. Докажите, что для любого натурального n число

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{n}\right] + \left[\sqrt{n}\right]$$

чётно.

7. Пусть M — некоторое непустое (возможно, бесконечное) подмножество множества простых чисел. Известно, что для любого конечного подмножества $K \subset M$ число $\left(\prod_{p \in K} p\right) - 1$ раскладывается на простые множители, принадлежащие M. Докажите, что тогда M — это всё множество простых чисел.

8. Натуральное число n называется *ржавым*, если существуют такие целые $a_1, a_2, \dots, a_n$, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n =$
$= a_1 a_2 \dots a_n = n$. Найдите все ржавые числа.

9. Обозначим через s_n сумму первых n простых чисел. Докажите, что для любого натурального n строго между числами s_n и s_{n+1} лежит точный квадрат.

10. На доске в строчку написано n подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Под каждым из этих чисел написан его делитель, меньший этого числа и больший 1. Оказалось, что эти делители тоже образуют строчку подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Докажите, что каждое из чисел, записанных в первой строке, больше, чем $\frac{n^k}{p_1 p_2 \cdots p_k}$ где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — все простые числа, меньшие n.