

Радикальные оси

1. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC найдены такие точки M и N , что $BM = MN$ и $BC = CN$. Из точки A к окружности ω_1 (с центром M и радиусом MC) и к окружности ω_2 (с диаметром MN) проведены касательные AK_1 и AK_2 соответственно (K_1 и K_2 — точки касания). Докажите, что $AK_1 = AK_2$.
2. Окружность, вписанная в угол с вершиной O , касается его сторон в точках A и B . Луч OX пересекает эту окружность в двух точках C и D так, что $OC = CD = 1$. Если M — точка пересечения луча OX и отрезка AB , то чему равна длина отрезка OM ?
3. Точка M лежит на диаметре AB окружности ω , причем не совпадает с ее центром. По одну сторону от диаметра на окружности взяты точки P и Q так, что отрезки PM и QM образуют равные углы с диаметром. Докажите, что все прямые PQ проходят через одну точку.
4. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M . Оказалось, что $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$. Докажите, что $\angle ACD = 2\angle ABD$.
5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_a и BH_b . Прямая H_aH_b пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q . Точка A' симметрична точке A относительно BC , точка B' симметрична точке B относительно AC . Докажите, что точки A' , B' , P и Q лежат на одной окружности.
6. $ABCD$ — равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC . Некоторая окружность касается отрезков AB и AC и пересекает отрезок BC в точках M и N . Точки X и Y — ближайšie к D точки пересечения вписанной окружности треугольника BCD с прямыми DM и DN соответственно. Докажите, что прямая XY параллельна AD .