

Деревья для взрослых

1. Дано дерево. За ход разрешается стереть одно ребро, ведущее в висячую вершину и соединить эту вершину ребром с любой другой вершиной. За какое наименьшее число ходов можно из одного заданного дерева на n вершинах гарантированно получить другое заданное дерево на n вершинах?
2. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что через каждый город проходит не больше одного кольцевого маршрута. Докажите, что города можно разделить на 3 области таким образом, чтобы дороги проходили только между городами из разных областей.
3. В стране 100 городов и 199 дорог (каждая дорога соединяет два города, любые два города соединены не более чем одной дорогой). Из любого города можно доехать по дорогам в любой другой. Докажите, что можно закрыть несколько дорог, образующих замкнутый маршрут, так, чтобы по оставшимся дорогам по-прежнему можно было доехать из любого города в любой другой.
4. На окружности отмечено n точек и проведены $n - 1$ хорда так, что (i) хорды не пересекаются по внутренним точкам и (ii) любые две отмеченные точки соединены ломаной. В каждой точке стоит по фишке. За один ход можно поменять местами две фишки, соединённые хордой, и стереть эту хорду. Докажите, что через несколько таких ходов можно добиться того, чтобы каждая фишка сдвинулась к ближайшей по часовой стрелке отмеченной точке. Стирать все рёбра не обязательно.
5. В некоторой стране есть 100 городов, которые связаны такой сетью дорог, что из любого города в любой другой можно проехать только одним способом без разворотов. Схема сети дорог известна, развилки и перекрестки сети необязательно являются городами, всякая тупиковая ветвь сети обязательно заканчивается городом. Навигатор может измерить длину пути по этой сети между любыми двумя городами. Можно ли за 100 таких измерений гарантированно определить длину всей сети дорог?
6. Дана чёрная доска 9×9 . Оля перекрашивает её клетки в белый цвет. После перекрашивания очередной клетки, Оля пишет в ней количество её чёрных соседей по стороне на данный момент. Так Оля перекрасила все клетки. Какое наименьшее количество клеток могут содержать число, большее 1?
7. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причём между каждыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из каждого города попасть в любой другой.