Композиция гомотетий

Теорема. Если композиция трех гомотетий является тождественным преобразованием плоскости, то центры этих гомотетий лежат на одной прямой.

1. На плоскости даны три непересекающихся неравных круга. Докажите, что
   (a) точки пересечения общих внешних касательных лежат на одной прямой.
   (b) точка пересечения общих внешних касательных к одной паре кругов и две точки пересечения общих внутренних касательных к двум другим парам кругов лежат на одной прямой.

2. Точка M — середина основания AD трапеции $ABCD$. Точка P выбрана на продолжении CD за точку D. Прямые PM и AC пересекаются в точке Q; прямые BP и AD пересекаются в точке X; прямые BQ и AD пересекаются в точке Y. Докажите, что $YM = MX$.

3. Окружность ω лежит внутри окружности Ω. Рассматриваются всевозможные окружности γ, касающиеся окружности ω внешним образом и окружности Ω внутренним образом. Докажите, что у всех таких окружностей есть общий радикальный центр.

4. Отмечены точки A', B', C' касания полувписанных окружностей треугольника ABC с его описанной окружностью. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' коллинеарны. (полувписанная окружность треугольника — окружность, касающаяся двух его сторон и описанной окружности.)

5. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка X. Окружность ω_1 проходит через X и касается сторон AB и AD параллелограмма. Окружность ω_2 проходит через X и касается сторон CB и CD параллелограмма. Докажите, что прямые, соединяющие центры ω_1 и ω_2 будут сонаправленны вне зависимости от положения точки X.

6. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанная около треугольника AHC окружность пересекает отрезки AB и BC в точках P и Q соответственно. Прямая PQ пересекает AC в R. На прямой PH взята точка K такая, что $\angle KAC = 90°$. Докажите, что прямая KR перпендикулярна одной из медиан треугольника ABC.